

13. Integrales*

1. Calcula las siguientes primitivas:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2} dx. & \text{b)} \int 3\sqrt{2x + 3} dx. & \text{c)} \int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}) dx. & \text{d)} \int 3x(1 + x^2)^3 dx. \\ \text{e)} \int (1 - x)5^{2x-x^2} dx. & \text{f)} \int \frac{1 - e^x}{e^{2x}} dx. & \text{g)} \int \frac{4}{(3x)^{\frac{1}{3}}} dx. & \text{h)} \int \frac{2 + \ln x}{x} dx. \\ \text{i)} \int x(x^2 + 1)^4 dx. & \text{j)} \int \frac{x}{\sqrt{4 - 3x^2}} dx. & & \end{array}$$

2. Calcula las siguientes primitivas:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int \cos(3x + \pi) dx. & \text{b)} \int \cotg 2x dx. & \text{c)} \int \cos^2 x dx. & \text{d)} \int \sen x \sen 3x dx. \\ \text{e)} \int \sen 2x \cos 3x dx. & \text{f)} \int \frac{2}{4 + x^2} dx. & \text{g)} \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sen^2 x}} dx. & \text{h)} \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2} dx. \end{array}$$

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

$$\text{a)} \int_1^4 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx. \quad \text{b)} \int_0^3 x e^{-x^2} dx. \quad \text{c)} \int_1^9 \frac{\ln x}{x} dx. \quad \text{d)} \int_0^{\frac{4}{3}\pi} \cos \frac{x}{2} dx.$$

4. Haz un esbozo de la región limitada por las gráficas de las funciones que siguen y determina su área.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = x^2 + 2x + 1, & g(x) = 3x + 3. \quad \text{b)} f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 4x + 3. \\ \text{c)} f(x) = \sqrt{x}, & g(x) = x^2. \end{array}$$

5. Determina el área del recinto que delimitan las gráficas de las funciones que se indican:

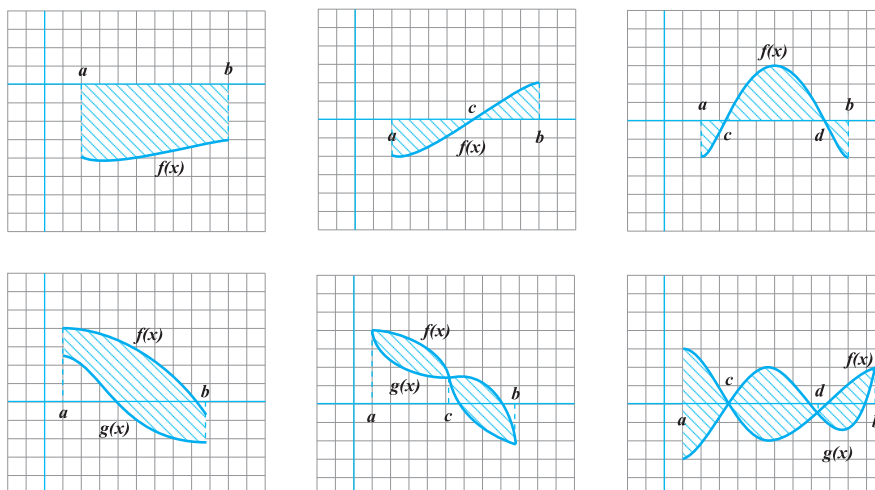
$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = x^2 - 2x + 1, x = 0, x = 2, \text{ eje } OX. & \text{b)} f(x) = e^x - e^{2x}, x = -1, x = 1, \text{ eje } OX. \\ \text{c)} f(x) = \sen 2x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, \text{ eje } OX. & \end{array}$$

6. Halla el área limitada por las gráficas de:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} y = x^2 - 3x + 4, \text{ eje } OX. & \text{b)} y = x^3 - 3x^2 + 4, y = x + 1. \\ \text{c)} y = \frac{2x}{x^2 + 1}, \text{ eje } OX, x = -1, x = 1. & \text{d)} y = \frac{2}{x^2 + 4}, x = 0, x = 2, y = 0. \end{array}$$

*Estos ejercicios han sido extraídos del libro de bachillerato MATEMÁTICAS I de la EDITORIAL LA Ñ, cuyos autores son Francisco Benítez, Juan Luis Romero, Eloy Fernández, José Manuel Díaz, Alfredo Domínguez y Octavio Ariza. Se recomienda su lectura para la realización de estos ejercicios.

7. Prueba que el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$ **no** puede calcularse como $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$. Calcula el área de la región indicada.
8. Un determinado avión necesita un kilómetro de pista y una velocidad de 300 kilómetros por hora para poder despegar. ¿Cuál debe ser la aceleración del avión para que éste despegue?
9. Un automóvil viaja a una velocidad de 100 kilómetros por hora y, al frenar su conductor, se detiene en 50 metros. Determina los metros que habrá recorrido hasta que su velocidad sea de 50 kilómetros por hora y hasta que sea de 25 kilómetros por hora.
10. Halla una función f tal que la pendiente de la recta tangente a su gráfica por el punto $(x, f(x))$ es $4x + 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$, sabiendo además que dicha gráfica contiene al punto $(1, 2)$.
11. Una bola, sometida a la fuerza de gravedad (cuya aceleración es $g = 9.8 \text{ m/sg}^2$), es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/sg.
- ¿Cuánto tiempo empleará la bola en alcanzar su altura máxima?
 - ¿En qué instante la velocidad de la bola será la mitad de la velocidad inicial?
 - ¿Cuál será la altura de la bola en dicho instante?
12. Un estudio ambiental demuestra, basándose en las ventas de vehículos a motor, que dentro de t años el nivel de monóxido de carbono subirá a razón de $0,1t + 0,2$ partes por millón anuales. El nivel actual de monóxido de carbono es de 5,6 partes por millón. ¿Cuál será el nivel de monóxido de carbono dentro de tres años?
13. Expresa mediante una integral las áreas de los recintos siguientes:



14. Determina el área del recinto limitado por: $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $x = -1$, $x = 1$ y su asíntota.
15. Calcula las primitivas siguientes: a) $\int \frac{(2 + 3 \ln x)^2}{x} dx$. b) $\int \frac{x^2 - 2x}{x - 1} dx$.
16. Prueba que $\int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{t} dt$, si $a, b > 0$.
17. Una función f es tal que $f''(x) = 2(x - 1)$, la gráfica de f contiene al punto $(3, 1)$ y la ecuación de la recta tangente a esa gráfica por dicho punto es $y = 3x - 8$. Determina $f(x)$.