



UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS

para estudiantes de primer curso
de facultades y escuelas técnicas

Tema 1

Nociones matemáticas básicas. Los números. Operaciones

Índice

1. Símbolos matemáticos	1
2. Teoría de conjuntos	2
2.1. Correspondencias. Aplicaciones	4
2.2. Leyes de composición. Estructuras algebraicas básicas	7
3. Números naturales	8
4. Números enteros	9
5. Números racionales	11
6. Números reales	12
7. La recta real. Intervalos	12
8. Números complejos	13
9. Potencias y radicales	14
9.1. Potencias de exponente entero	14
9.2. Definición de radical. Relación entre potencias y radicales	15
9.3. Propiedades de los radicales	16
9.4. Operaciones con radicales	18
10. Notación científica	20
11. Ejercicios propuestos	20

1. Símbolos matemáticos

Las Matemáticas se pueden definir como el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas.

En el pasado las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra). Hacia mediados del siglo XIX las matemáticas empezaron a considerarse como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica, ciencia que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos.

En matemáticas es fundamental utilizar una buena nomenclatura para que los conceptos puedan ser manejados de forma clara, precisa y concisa. Aquí es donde entran en juego los signos o símbolos matemáticos, que están constituidos por figuras, señales y abreviaturas utilizados en matemáticas para denotar entidades, relaciones y operaciones.

El origen y la evolución de los símbolos matemáticos no se conocen bien. El origen del cero es desconocido, aunque hay confirmación de su existencia antes del año 400 d.C. La extensión del sistema de lugares decimales a los que representan valores inferiores a la unidad se atribuye al matemático holandés Simon Stevin (conocido también como Simon de Brujas), que llamó a las décimas, centésimas y milésimas *primas*, *secundas* y *tercias*. Antes de 1492 ya se empezó a utilizar un punto para separar la parte decimal de un número. Más tarde se usó también una raya vertical. En su *Exempelbüchlein* de 1530, el matemático alemán Christoff Rudolf resolvía un problema de interés compuesto haciendo uso de fracciones decimales. El astrónomo alemán Johannes Kepler empezó a utilizar la coma para separar los espacios decimales, y el matemático suizo Justus Byrgius utilizaba fracciones decimales de la forma 3,2.

A pesar de que los antiguos egipcios tenían símbolos para la adición y la igualdad, y los griegos, hindúes y árabes tenían símbolos para la igualdad y las incógnitas, en esos primeros tiempos las operaciones matemáticas solían ser bastante engorrosas debido a la falta de signos apropiados. Las expresiones de dichas operaciones tenían que ser escritas por completo o expresadas mediante abreviaturas de las palabras. Más tarde, los griegos, los hindúes y el matemático alemán Jordanus Nemorarius empezaron a indicar la suma mediante yuxtaposición, mientras que los italianos la denotaban con las letras P o p atravesadas con una raya, pero estos símbolos no eran uniformes. Ciertos matemáticos utilizaban la p , otros la e , y el italiano Niccolò Tartaglia solía expresar esta operación como \emptyset . Los algebristas alemanes e ingleses introdujeron el signo $+$, al que denominaron *signum additorum*, aunque al principio sólo se utilizaba para indicar excedentes. El matemático griego Diofante utilizaba el signo \nearrow para indicar la sustracción. Los hindúes usaban un punto y los algebristas italianos la representaban con una M o m y con una raya atravesando la letra. Los algebristas alemanes e ingleses fueron los primeros en utilizar el signo actual, al que denominaron *signum subtractorum*. Los signos $+$ y $-$ fueron usados por primera vez en 1489 por el alemán Johann Widman.

El matemático inglés William Oughtred fue el primero en usar el signo \times en vez de la palabra “veces”. El matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizaba un punto para indicar la multiplicación y, en 1637, el francés René Descartes empezó a usar la yuxtaposición de los factores. En 1688 Leibniz utilizó el símbolo \cap para denotar la multiplicación y \cup para la división. Los hindúes colocaban el divisor debajo del dividendo. Leibniz usó la forma más conocida $a : b$. Descartes popularizó la notación a^n para la potenciación y el matemático inglés John Wallis definió los exponentes negativos y utilizó el símbolo ∞ para representar infinito.

El signo de igualdad, $=$, lo creó el matemático inglés Robert Recorde. Otro matemático inglés, Thomas Harriot, fue el primero en utilizar los símbolos $>$ y $<$, “mayor que” y “menor que”. El ma-

temático francés François Viète introdujo varios signos de agrupación. Los símbolos de diferenciación, dx , y de integración, \int , empleados en el cálculo, son originales de Leibniz, lo mismo que el símbolo \sim de semejanza, utilizado en geometría. El matemático suizo Leonhard Euler es el principal responsable de los símbolos \emptyset , f , F , usados en la teoría de funciones.

En la siguiente tabla se proporcionan los símbolos matemáticos más utilizados:

$=$	igual
\neq	distinto
$<, \leq$	menor, menor o igual
$>, \geq$	mayor, mayor o igual
\subset, \subseteq	incluido o contenido
\supset, \supseteq	que contiene o incluye
\in	pertenece
\notin	no pertenece
\equiv	equivalente
\approx	aproximadamente igual a
\forall	para todo, para cualquier, para cada
\exists	existe
$\exists!, \exists!$	existe un/a único/a
\nexists	no existe
$/, :$	tal(es) que
$A \implies B$	si ocurre A entonces ocurre B
$A \impliedby B$	si ocurre B entonces ocurre A
$A \iff B$	sucede A si y sólo si (siempre y cuando) suceda B

2. Teoría de conjuntos

Aunque la definición de conjunto puede ser muy complicada, nos conformaremos con decir que un **conjunto** es un grupo de elementos que poseen una cierta propiedad. Además se cuenta con el llamado **conjunto vacío**, que se denota por \emptyset , y es el único conjunto que no contiene ningún elemento.

Los conjuntos se denotarán siempre con letras mayúsculas y sus elementos, que se escribirán siempre en minúsculas, se incluirán entre llaves y separados por comas:

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{x\}, \quad C = \{7, 90\}.$$

Dados dos conjuntos A y B , diremos que B es un **subconjunto** de A o que B **está incluido** en A si todos los elementos de B pertenecen a A . Lo escribimos

$$B \subseteq A \iff x \in A, \forall x \in B$$

Ejemplo 2.1 Sea el conjunto $A = \{x, y, z, t\}$. Éste está constituido por cuatro elementos: x, y, z, t . Podemos decir que

1. $x \in A, y \in A, z \in A, t \in A$.
2. $a \notin A$.
3. $B = \{y, z\} \implies B \subseteq A$.

Diremos que dos conjuntos, A y B , son **iguales** si ambos están formados por los mismos elementos:

$$A = B \iff [x \in A \iff x \in B].$$

Además se tiene que el conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.

Entre conjuntos se pueden realizar operaciones como la **unión**, la **intersección** y la **diferencia**. Así, si A y B son dos conjuntos cualesquiera tendremos que

• $\mathbf{A \cup B}$, (A unión B), es el conjunto constituido por los elementos de A y de B :

$$A \cup B = \{x : x \in A, \text{ y/o } x \in B\}.$$

La unión posee las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq A \cup B$, es decir:

$$\forall x \in A, x \in A \cup B \iff [x \in A \implies x \in A \cup B].$$

2. $B \subseteq A \cup B$.

• $\mathbf{A \cap B}$, (A intersección B), es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B :

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}.$$

Diremos que dos conjuntos A y B son **disjuntos** cuando $\mathbf{A \cap B} = \emptyset$. La intersección posee las siguientes propiedades:

1. $A \cap B \subseteq A$, es decir:

$$\forall x \in A \cap B, x \in A \iff [x \in A \cap B \implies x \in A].$$

2. $A \cap B \subseteq B$.

3. $A \cap B \subseteq A \cup B$.

• $\mathbf{A - B}$, (A menos B), es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B :

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Si $B \subseteq A$, se define el **conjunto complementario** de B en A como $B^c = \{x \in A : x \notin B\}$. Las propiedades de la diferencia son las que siguen:

1. $A - B \subseteq A$, esto es:

$$\forall x \in A - B, x \in A \iff [x \in A - B \implies x \in A]$$

2. $A - B \subseteq A \cup B$.

Veamos todo esto en un caso concreto. Considérense los conjuntos $A = \{a, b, c, d, f\}$ y $B = \{x, y, s\}$. Como puede observarse en la figura 1, se tiene que

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{a, b, c, d, f, x, y, s\}, & A \cap B &= \{d, f, s\}, \\ A - B &= \{a, b, c\}, & B - A &= \{x, y\}. \end{aligned}$$

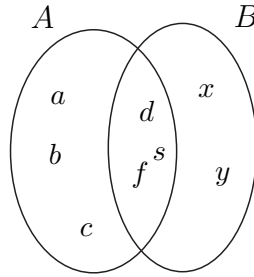


Figura 1

Por último, dados dos conjuntos A y B , se define el **producto cartesiano** de A y B como el conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ejemplo 2.2 Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, el producto cartesiano de ambos conjuntos será

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

2.1. Correspondencias. Aplicaciones

Dados dos conjuntos cualesquiera, A y B , se pueden establecer relaciones que ligen de alguna forma los elementos del conjunto A con los del conjunto B . Así, se llama **correspondencia** de A en B a cualquier criterio que asigne elementos de B a elementos de A .

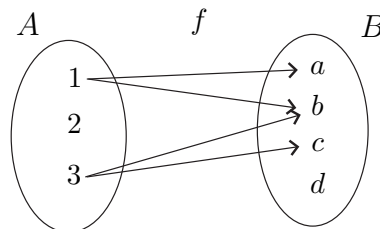
Una correspondencia f de A en B se denotará habitualmente por

$$f : A \longrightarrow B,$$

y diremos que A es el **conjunto inicial** y B el **conjunto final**. La **imagen** de un elemento de A es el elemento o elementos de B que se le asignan, y la **antiimagen** de un elemento de B es el elemento o elementos de A a los que es asignado. De este modo, si $b \in B$ es imagen de $a \in A$, se escribirá

$$f(a) = b.$$

Ejemplo 2.3 Considérense los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. Entre ambos puede establecerse una correspondencia f mediante la figura que sigue:



Se tiene que

1. la imagen de 1 es a y b ,
2. el elemento 2 no tiene imagen,
3. la antiimagen de c es 3,
4. el elemento d no tiene antiimagen.

Una **aplicación** o **función** es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final.

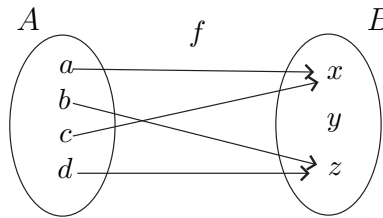


Figura 2: Aplicación.

Sean A y B dos conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una aplicación. Si $S \subset A$, se define el **conjunto imagen** de S por f , o simplemente la **imagen** de S por f , como

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\} = \{y \in B : \exists x \in S, y = f(x)\} \subset B.$$

En el caso en que sea $S = A$ tendremos que $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ es el **conjunto imagen** de f o la **imagen** de f . Por convenio será $f(\emptyset) = \emptyset$.

Si $T \subset B$, se define el **conjunto antiimagen** de T por f , o simplemente la **antiimagen** de T por f , como

$$f^{-1}(T) = \{x \in A : f(x) \in T\} \subset A.$$

Tendremos además que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ por convenio.

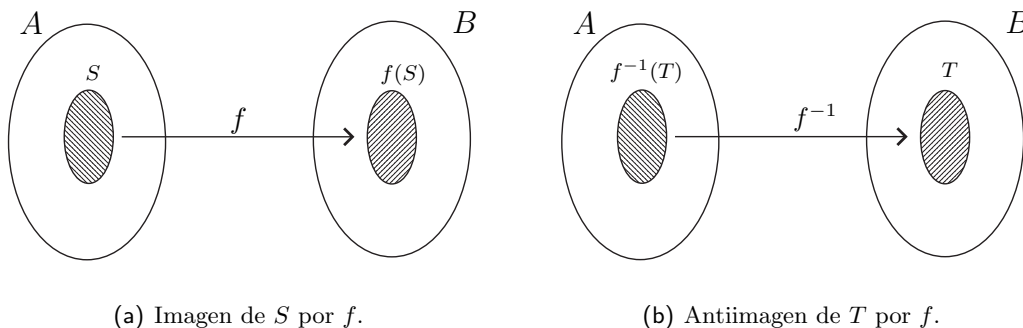


Figura 3: Imagen y antiimagen por una aplicación.

Dada la aplicación $f : A \longrightarrow B$, si $C \subset A$, se define la aplicación **restricción** de f a C como la aplicación

$$f|_C : C \longrightarrow B \\ x \longmapsto f|_C(x) = f(x)$$

Diremos que $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación

- **inyectiva** si elementos distintos de A tienen imágenes distintas, es decir, si

$$a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2),$$

o equivalentemente,

$$a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

- **sobreyectiva o suprayectiva** si todo elemento de B tiene antiimagen, esto es, si

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b,$$

o lo que es lo mismo, si $f(A) = B$;

- **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva, o sea, si

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$$

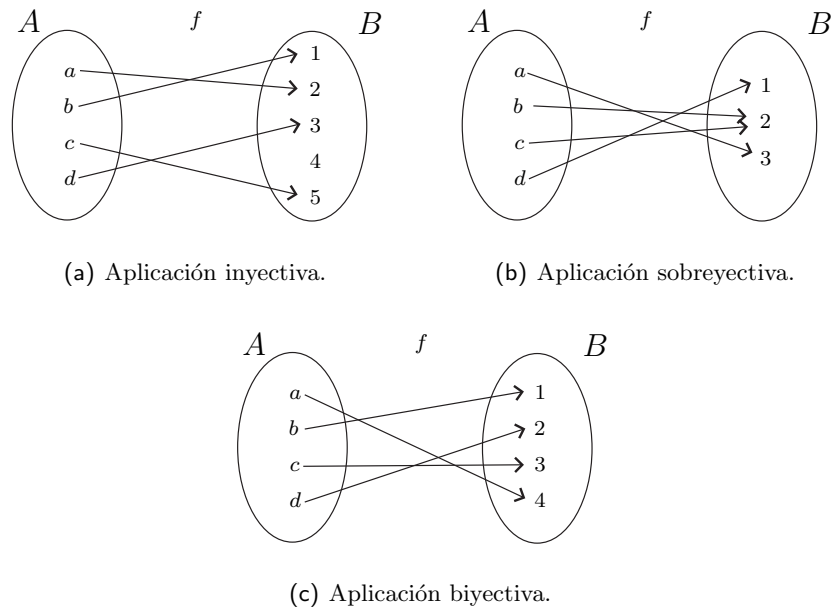


Figura 4: Tipos de aplicaciones.

Si A , B y C son tres conjuntos, y $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son dos aplicaciones, podemos definir una aplicación de A en C haciendo uso de f y g : la **composición** de f con g , que se denotará por $g \circ f$.

$$g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ x \longmapsto y = f(x) \longmapsto g(y) = g(f(x))$$

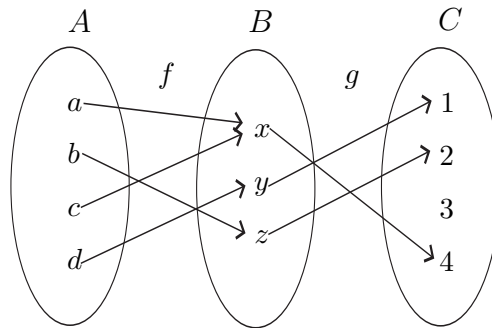


Figura 5: Composición de aplicaciones.

Ejemplo 2.4 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ dos aplicaciones definidas por la figura 5. Obsérvese que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a) &= g(f(a)) = g(x) = 1, & (g \circ f)(b) &= g(f(b)) = g(z) = 2, \\ (g \circ f)(c) &= g(f(c)) = g(x) = 1, & (g \circ f)(d) &= g(f(d)) = g(y) = 2. \end{aligned}$$

2.2. Leyes de composición. Estructuras algebraicas básicas

Llamamos **ley de composición interna** u **operación interna** definida en un conjunto A a una aplicación

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

Llamamos **ley de composición externa** u **operación externa** definida en un conjunto A con conjunto de operadores K a una aplicación

$$\begin{aligned} \perp : K \times A &\longrightarrow A \\ (\lambda, a) &\longmapsto \lambda \perp a \end{aligned}$$

Una operación interna $*$ definida en un conjunto A puede verificar las siguientes propiedades:

Asociativa: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in A$.

Conmutativa: $a * b = b * a$, $\forall a, b \in A$.

Existencia de elemento neutro: $\exists! e \in A : a * e = e * a = a$, $\forall a \in A$.

Existencia de elemento simétrico: $\forall a \in A, \exists! \bar{a} \in A : a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$, siendo e el elemento neutro del conjunto A .

Si $*$ y \circ son dos operaciones internas definidas en un conjunto A , se dirá que \circ es **distributiva** respecto de $*$ si $\forall a, b, c \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} (a * b) \circ c &= (a \circ c) * (b \circ c), \\ a \circ (b * c) &= (a \circ b) * (a \circ c). \end{aligned}$$

Si A es un conjunto con una operación interna $*$, diremos que el par $(A, *)$ es un **grupo** si $*$ satisface las propiedades siguientes:

- asociativa,
- existe elemento neutro,
- existe elemento simétrico.

Se dice que el grupo $(A, *)$ es **abeliano** o **conmutativo** si $*$ es conmutativa.

Si A es un conjunto con dos operaciones internas, $*$ y \circ , se dirá que la terna $(A, *, \circ)$ es un **anillo** si

- $(A, *)$ es un grupo,
- \circ es asociativa,
- \circ es distributiva respecto de $*$.

Se dice que $(A, *, \circ)$ es un anillo **abeliano** o **conmutativo** si \circ conmutativa, y que es un anillo **unitario** si \circ posee elemento neutro.

Si A es un conjunto con dos operaciones internas, $*$ y \circ , la terna $(A, *, \circ)$ se dice que es un **cuerpo** si

- $(A, *)$ es un grupo conmutativo,
- $(A - \{0\}, \circ)$ es grupo, siendo 0 el elemento neutro de $*$,
- \circ es distributiva respecto de $*$.

Cuando \circ es conmutativa, se dirá que $(A, *, \circ)$ es un cuerpo **abeliano** o **conmutativo**.

3. Números naturales

La Aritmética se basa en el concepto de **número natural**; prescindiendo del análisis de este concepto, nos limitaremos a indicar que matemáticamente puede introducirse partiendo de tres conceptos base: el “1” –el uno en el sentido habitual–, “número” –que indica 1, 2, 3, . . .–, y “sig” o “siguiente” por el que se indica el que le sigue en el orden natural. A partir de ellos se definen los números naturales como el conjunto de entes que satisfacen los cinco axiomas siguientes:

- I. 1 es un número natural.
- II. A cada número natural n , le corresponde unívocamente otro que se llama el siguiente: $\text{sig } n$.
- III. El 1 no tiene precedente.
- IV. Si $\text{sig } n = \text{sig } m$ entonces $n = m$.
- V. *Principio de inducción completa.*– Si un conjunto C de números naturales cumple las siguientes condiciones:
 - a) C contiene al 1,
 - b) si C contiene a n , también contiene a $\text{sig } n$,
 entonces C contiene a todos los números naturales.

Estos axiomas, que pueden considerarse como una “definición implícita” de los números naturales, permiten edificar de modo riguroso toda la Aritmética.

Así, pueden definirse por recurrencia la **suma** y **multiplicación** de números naturales y demostrarse las leyes usuales de cálculo. La **suma** se define por las reglas siguientes, válidas para cualesquiera n y m :

$$n + 1 = \text{sig } n, \quad n + \text{sig } m = \text{sig } (n + m).$$

Por ejemplo:

$$n + 2 = n + \text{sig } 1 = \text{sig } (n + 1), \quad n + 3 = n + \text{sig } 2 = \text{sig } (n + 2), \quad \dots$$

La **multiplicación** se define mediante las dos reglas siguientes, válidas para cualesquiera n y m :

$$n \cdot 1 = n, \quad n \cdot \text{sig } m = nm + n.$$

Por ejemplo:

$$n \cdot 2 = n \cdot \text{sig } 1 = n \cdot 1 + n = n + n, \quad n \cdot 3 = n \cdot \text{sig } 2 = n \cdot 2 + n, \quad \dots$$

Siguiendo el método de inducción se prueban las reglas usuales de cálculo:

	Suma	Multiplicación
Ley conmutativa	$n + m = m + n$	$nm = mn$
Ley asociativa	$(n + m) + k = n + (m + k)$	$(nm)k = n(mk)$
Ley distributiva		$(n + m)k = nk + mk$

Además se tienen las **leyes cancelativas** de la suma y la multiplicación:

$$n + k = m + k \implies n = m, \quad nk = mk \implies n = m$$

A partir de lo anterior se definen los conceptos de **mayor** y **menor**, gracias a los cuales puede establecerse una ordenación de los números naturales. De este modo, se dice que n es mayor que m , y se escribe $n > m$ o bien $m < n$, si existe un número natural k tal que $n = m + k$.

También por inducción se demuestran las leyes usuales de la desigualdad:

Ley de tricotomía.— Para cada dos números naturales n y m , vale una y sólo una de las relaciones siguientes: $n > m$, $n = m$, $n < m$.

Ley transitiva de la monotonía.— Si $n > m$ y $m > k$ entonces $n > k$.

Ley de monotonía de la suma.— Si $n > m$ entonces $n + k > m + k$.

Ley de monotonía de la multiplicación.— Si $n > m$ entonces $nk > mk$. De ésta se sigue que si $n > m$ y $k > j$ entonces $nk > mj$.

Finalmente, decir que el conjunto de los números naturales se representa por \mathbb{N} .

4. Números enteros

En el conjunto de los números naturales son siempre posibles la suma y la multiplicación, pero no las operaciones inversas.

Ejemplo 4.1 No tienen solución las operaciones $4 - 7$, $17 : 3$, ni en general $n - m$ si $n < m$, ni $n : m$ si n no es múltiplo de m .

Ello obliga a ampliar el concepto de número, introduciendo los números negativos, el cero y los fraccionarios.

Para hacer posible la sustracción se introducen los **números enteros**. Llamamos **números enteros** a los pares ordenados $\{a - b\}$ –minuyendo–sustraendo– de números naturales con la condición de que $\{a - b\} = \{c - d\}$ si y sólo si $a + d = b + d$.

Siendo $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se llama **entero positivo** $+a$ al representado por el par $\{(a + n) - n\}$, **cero** al entero $\{n - n\}$ y **entero negativo** al número $-a = \{n - (k + n)\}$.

A partir de las definiciones anteriores se definen la suma, el producto y la desigualdad:

Suma: $\{a - b\} + \{c - d\} = \{(a + c) - (b + d)\}$,

Producto: $\{a - b\} \cdot \{c - d\} = \{(ac + bd) - (ad + bc)\}$,

Desigualdad: $\{a - b\} < \{c - d\} \iff a + d < b + c$,

cuya fecundidad estriba en que las reglas operatorias serán las mismas que para los números naturales. Y se demuestran, la ley uniforme –el resultado es independiente del par elegido para representar a cada número–, asociativa, conmutativa, cancelativa, de la suma; distributiva, conmutativa de la multiplicación; de tricotomía, transitiva de la monotonía y de monotonía de la suma para las desigualdades; en cambio, las leyes cancelativas y de monotonía de la multiplicación se enuncian a continuación:

Ley cancelativa.– De ser $ab = ac$ con $a \neq 0$, se deduce que $b = c$.

Ley de monotonía.– Si $a > b$ y $c > 0$ (o bien, $c < 0$, o bien, $c = 0$) entonces $ac > bc$ (o bien, $ac < bc$, o bien, $ac = bc$).

Conviene completar estas leyes con la llamada **Ley modular**: existe, para cada una de las dos operaciones –suma y multiplicación– un número llamado **elemento neutro** o **módulo** que no modifica el valor de otro cualquiera al que se aplique.

Para la suma este número es el **cero**, ya que, siendo p un número entero cualquiera, es $p + 0 = 0 + p = p$; y para la multiplicación es el **uno**, ya que $p \cdot 1 = 1 \cdot p = p$.

Con las definiciones y reglas anteriores la ecuación $a + x = b$ siempre posee solución, lo que permite interpretar el signo – como de **diferencia**, y definir el número **opuesto** de uno dado a como solución de la ecuación $a + x = 0$. De dos números opuestos a y $-a$ uno es siempre positivo y éste se define como el **valor absoluto** de a y se designa por $|a|$, siendo $|0| = 0$.

Basándose en estas definiciones se demuestran a su vez las reglas de signos

$$+ \cdot + = +, \quad + \cdot - = -, \quad - \cdot + = -, \quad - \cdot - = +,$$

y la regla general de desigualdad:

$$a > b \iff a - b > 0.$$

De ello se sigue que *todo número positivo es mayor que todo número negativo y de dos números negativos es menor el de mayor valor absoluto*. Además, el valor absoluto de una suma de dos números a y b es la suma de los valores absolutos de éstos, si ambos tienen el mismo signo; pero si lo tienen distinto, el valor absoluto de $a + b$ es $|a| - |b|$ –suponiendo que $|a| > |b|$ –, número inferior a $|a| + |b|$ por ser $-|b| < |b|$. Resumiendo ambos casos tenemos que

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

El conjunto de todos los números enteros se conoce por \mathbb{Z} y $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo.

5. Números racionales

A fin de hacer posible la división es preciso ampliar el conjunto de los números enteros, introduciendo el concepto de **número racional**.

Un **número racional** se define como un par ordenado de números enteros que se representan en la forma $\frac{a}{b}$, siendo $b \neq 0$; el primero se denomina **numerador** y el segundo **denominador**, con la siguiente convención:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = cb.$$

Ampliando así, con la introducción de los números fraccionarios, el concepto de número, hay que volver a definir para los nuevos entes, las operaciones fundamentales:

Suma y multiplicación.— Se definen la suma y el producto de dos números racionales $p = \frac{a}{b}$ y $q = \frac{c}{d}$, del modo siguiente:

$$p + q = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad pq = \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

La sustracción y la división se definen, respectivamente, como operaciones inversas de las anteriores.

En el campo de los números racionales son siempre posibles las cuatro operaciones: suma, sustracción, multiplicación y división —ésta con divisor distinto de cero—, operaciones que, por ello, se denominan **racionales**. Definidas éstas, se demuestran fácilmente que las leyes fundamentales, uniforme, conmutativa, asociativa, distributiva, modular y cancelativa de la adición y multiplicación, establecidas para los enteros, se mantienen para las operaciones con números racionales.

Aparte de las anteriores, se definen las **Leyes de inversión**: dado el número racional p siempre tienen solución las ecuaciones $p + x = 0$ y $px = 1$ —ésta siempre que sea $p \neq 0$ —. El número x se llama **opuesto** en el primer caso e **inverso** en el segundo.

Los números racionales se dividen en **positivos** y **negativos**, dependiendo de que el numerador y denominador tengan igual signo o distinto.

Dados dos números racionales p y q , se dice que $p > q$ siempre y cuando $p - q > 0$. De aquí se sigue que, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son positivos,

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff ad > bc.$$

De esta definición se deduce fácilmente que, para las desigualdades entre números racionales, se siguen verificando las leyes fundamentales —de tricotomía, transitiva y de monotonía— anteriormente establecidas, y las reglas para operar con desigualdades.

Es interesante el siguiente

Teorema 5.1 (de Arquímedes) *Si $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, existe un número natural n tal que $n\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.*

Un teorema importante que señala una diferencia esencial entre los números enteros y los racionales es el siguiente:

Teorema 5.2 *Dados dos números racionales p y q tales que $p > q$, existe siempre otro número racional r tal que $p > r > q$.*

Así, por ejemplo, el número racional $\frac{1}{2}(p + q)$ está siempre comprendido entre los números racionales p y q .

Del teorema anterior se puede deducir el

Corolario 5.1 *Dados dos números racionales distintos cualesquiera, existen siempre infinitos números racionales comprendidos entre ellos.*

Finalmente, decir que el conjunto de los números racionales se denota por \mathbb{Q} . Es más, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

6. Números reales

Además de las cuatro operaciones descritas con anterioridad, hay otras que también se pueden realizar en el conjunto de los números racionales, como puede ser la **potenciación** de números racionales con exponente entero: p^n . La operación inversa, llamada **radicación** o **extracción de raíces**, no siempre es posible en \mathbb{Q} , y da lugar a una ampliación de dicho conjunto: el conjunto \mathbb{R} de los **números reales**.

Extraer la raíz n -ésima de un número dado p consiste en hallar otro número q que, elevado a la potencia n , sea igual a p . Es decir,

$$\sqrt[n]{p} = q \iff q^n = p,$$

donde p recibe el nombre de **radicando**.

Ejemplo 6.1

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8} &= 2, & \text{ya que} & & 2^3 &= 8; \\ \sqrt{64} &= 8, & \text{ya que} & & 8^2 &= 64; \\ \sqrt{\frac{4}{9}} &= \frac{2}{3}, & \text{ya que} & & \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Cuando el radicando es un cuadrado perfecto, su raíz es un número racional, como puede verse en el ejemplo anterior. Sin embargo, si el radicando no es un cuadrado perfecto, la raíz cuadrada no es un número racional. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ no es un número racional, ya que no puede expresarse como cociente de dos números enteros. Tampoco son racionales los números $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt{15}$ por la misma razón. Todos estos números constituyen un conjunto llamado conjunto de los **números irracionales**, \mathbb{I} , y que puede definirse como el conjunto de números que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros.

La unión de los números racionales y de los irracionales constituyen el conjunto de los **números reales**, denotado por \mathbb{R} . Con los números que forman este conjunto se pueden realizar todas las operaciones hasta ahora definidas, y se verifican todas las leyes fundamentales y de desigualdad ya estudiadas. Más aún, los teoremas y el corolario enunciados para los números racionales también son válidos para los números reales. Se tiene que $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

7. La recta real. Intervalos

Los números reales se representan gráficamente sobre una recta llamada **recta real**, de modo que a cada número real le corresponde un único punto de la recta y viceversa, como se muestra en la figura 6.

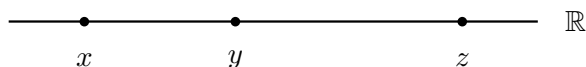


Figura 6: Recta real con tres puntos cualesquiera $x < y < z$.

Estudiemos ahora los denominados **intervalos**; para ello, considérense dos números cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Se tienen los siguientes tipos de intervalos:

- Intervalo abierto de extremos a y b : $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

- Intervalo cerrado de extremos a y b : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

- Intervalos semiabiertos o semicerrados de extremos a y b :

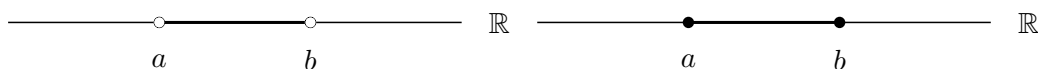
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

- Intervalos infinitos:

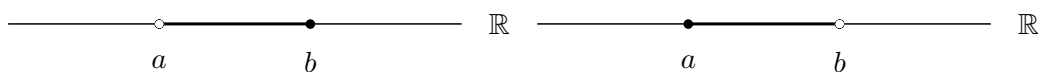
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}.$$

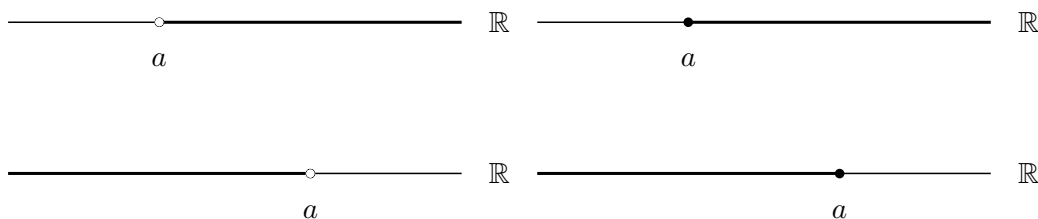
En la figura 7 aparecen representados sobre la recta real todos los intervalos anteriores. Obsérvese que en dicha figura aparecen puntos “huecos” y puntos “reellenos”; ésta es la notación habitual para representar el extremo abierto del intervalo, en el primer caso, y el extremo cerrado del intervalo, en el segundo.



(a) Intervalos (a, b) y $[a, b]$, respectivamente.



(b) Intervalos $(a, b]$ y $[a, b)$, respectivamente.



(c) Intervalos $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$, respectivamente.

Figura 7: Intervalos en la recta real.

8. Números complejos

Los números complejos aparecieron al buscar soluciones para ecuaciones como $x^2 = -1$. No existe ningún número real x cuyo cuadrado sea -1 , por lo que los matemáticos de la antigüedad concluyeron que no tenía solución. Sin embargo, a mediados del siglo XVI, el filósofo y matemático italiano Gerolamo Cardano y sus contemporáneos comenzaron a experimentar con soluciones de ecuaciones que incluían las raíces cuadradas de números negativos.

La llamada **unidad imaginaria**, definida como $\sqrt{-1}$ y denotada por i , resulta ser una de las soluciones de la ecuación anterior:

$$x^2 = -1 \iff x = \pm i.$$

Decimos que toda expresión de la forma $a + bi$ se llama **número complejo**, donde a y b son números reales. Con estos números se pueden realizar todas las operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. El conjunto de todos los números complejos se denota por \mathbb{C} , y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

En estas condiciones, se puede resolver, por ejemplo, la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Esto es, las soluciones de la ecuación son $-1 + i$ y $-1 - i$.

El gran logro de Gauss fue demostrar que todo polinomio no trivial (es decir, que tiene al menos una raíz distinta de cero) con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. De aquí se deduce que todo polinomio complejo de grado n tiene exactamente n raíces, no necesariamente distintas.

9. Potencias y radicales

9.1. Potencias de exponente entero

La potenciación con exponente natural es un caso particular del producto en \mathbb{R} ; en efecto, si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$a^n = a \cdot \overbrace{a \cdots a}^n.$$

A continuación se exponen las propiedades fundamentales de las potencias de exponente entero:

Producto de potencias de igual base: $a^n a^m = a^{n+m}$.

Cociente de potencias de igual base: $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Producto de potencias de igual exponente: $a^n b^n = (ab)^n$.

Cociente de potencias de igual exponente: $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Potencia de una potencia: $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$.

Potencia con exponente nulo: $a^0 = 1$ ya que, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Potencia con exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Ejemplo 9.1

$$1. (\sqrt{3})^3 (\sqrt{3})^9 = (\sqrt{3})^{3+9} = (\sqrt{3})^{12}.$$

$$2. (\sqrt[5]{41})^7 : (\sqrt[5]{41})^3 = (\sqrt[5]{41})^{7-3} = (\sqrt[5]{41})^4.$$

3. Tenemos por un lado que $\frac{5^3}{5^5} = 5^{3-5} = 5^{-2}$, mientras que por otro

$$\frac{5^3}{5^5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2},$$

de modo que $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$.

$$4. \left(\frac{2}{3}\right)^{-6} = \frac{1}{(2/3)^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6.$$

Otras propiedades importantes que resultan de las anteriores son:

Producto de potencias monomias: $(a^n b^m)(a^i b^j)(a^k b^l) = a^{n+i+k} b^{m+j+l}$.

Cociente de potencias monomias: $(a^n b^m) : (a^i b^j) = \frac{a^n b^m}{a^i b^j} = a^{n-i} b^{m-j}$.

Ejemplo 9.2

$$1. (a^3 b^5)(a^2 b) = a^5 b^6.$$

$$2. (x^2 y)(y^3 z) = x^2 y^4 z.$$

$$3. (a^4 b c) : (a^2 b^3 c d) = a^2 b^{-2} c^0 d^{-1} = \frac{a^2}{b^2 d}.$$

9.2. Definición de radical. Relación entre potencias y radicales

Llamaremos **raíz n -ésima** de un número $a \in \mathbb{R}$, a otro número $b \in \mathbb{R}$, si existe, que elevado a la potencia n sea igual al radicando, esto es

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a.$$

El número n es el **índice** del radical, a es el **radicando** y el signo $\sqrt{\cdot}$ se denomina **signo radical**. Cuando $n = 2$ se escribirá \sqrt{a} y se llamará *raíz cuadrada* de a , si $n = 3$ hablaremos de la *raíz cúbica* de a . Si $n = 4, 5, \dots$ estaremos hablando de las raíces *cuarta*, *quinta*, ... de a .

En cuanto a la notación, decir que se escribirá también

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n},$$

pues si $\sqrt[n]{a} = b$ entonces, por definición, $a = b^n = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = (a^{1/n})^n$. Con esta notación se pueden demostrar fácilmente las propiedades de los radicales, pues son las mismas que las de las potencias con exponente entero.

Obsérvese que *la potencia n -ésima y la raíz n -ésima son operaciones recíprocas o inversas*. Por ejemplo,

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2, \quad \sqrt[5]{a^5} = a.$$

Nótese que, aplicando las propiedades de la potencia con exponente entero en los casos anteriores, tenemos que

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = (2^{1/3})^3 = 2^{3/3} = 2^1 = 2, \quad \sqrt[5]{a^5} = (a^5)^{1/5} = a^{5/5} = a^1 = a.$$

9.3. Propiedades de los radicales

Propiedad fundamental de los radicales.— $\sqrt[pn]{a^{qn}} = \sqrt[p]{a^q}$.

Para probar esta igualdad, basta con elevar el segundo miembro a la potencia pn y observar que se obtiene el radicando del primer miembro:

$$(\sqrt[p]{a^q})^{pn} = \left[(\sqrt[p]{a^q})^p \right]^n = (a^q)^n = a^{qn}.$$

Ejemplo 9.3

$$\begin{aligned} \sqrt{3a} &= \sqrt[4]{(3a)^2} = \sqrt[4]{9a^2}, & \sqrt[3]{2a^2(x^2+y)} &= \sqrt[6]{2^2 a^4 (x^2+y)^2} = \sqrt[6]{4a^4(x^2+y)^2}, \\ \sqrt[4]{36} &= \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}, & \sqrt[10]{32} &= \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Transformación de radicales.— Un radical puede transformarse de infinitas formas en otro sin más que multiplicar o dividir el exponente y el índice del radicando por un mismo número.

Ejemplo 9.4 Los radicales siguientes son iguales o equivalentes:

$$\sqrt[12]{9a^6}, \quad \sqrt[6]{3a^3}, \quad \sqrt[18]{27a^9}, \quad \sqrt[24]{81a^{12}}.$$

Reducción de radicales a índice común.— Se opera de forma similar a la de reducción de fracciones a común denominador:

- Se halla el m.c.m. de los índices, que será el índice común.
- Se divide el índice común por cada índice y el cociente se multiplica por el exponente del radicando.

Ejemplo 9.5 Reduzcamos los siguientes radicales a índice común:

$$\sqrt{3ax^2}, \quad \sqrt[6]{3(x-2a)}, \quad \sqrt[4]{5a^3b^2}, \quad 3a^2.$$

Como el m.c.m.(2, 6, 4, 1) = 12, los radicales anteriores se convierten en

$$\sqrt[12]{3^6 a^6 x^{12}}, \quad \sqrt[12]{3^2 (x-2a)^2}, \quad \sqrt[12]{5^3 a^9 b^6}, \quad \sqrt[12]{3^{12} a^{24}}.$$

Raíz de un producto.— $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}$.

En efecto;

$$\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c} \right)^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n (\sqrt[n]{c})^n = abc.$$

Ejemplo 9.6 $\sqrt[3]{27 \cdot 343 \cdot 729} = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{343} \sqrt[3]{729} = 3 \cdot 7 \cdot 9 = 189$.

Raíz de un cociente.— $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Así es, puesto que

$$\left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \right)^n = (\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n = a : b.$$

Ejemplo 9.7 $\sqrt{\frac{441}{49}} = \frac{\sqrt{441}}{\sqrt{49}} = \frac{21}{7} = 3$.

Potencia de una raíz o raíz de una potencia.— $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

En efecto, como caso particular del producto de radicales se tiene:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \overbrace{\cdots}^m \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdots a} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ejemplo 9.8

$$(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8, \quad \sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8.$$

Raíz de una raíz.— $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Para probar esta igualdad basta con elevar el primer miembro de la potencia mn -ésima y observar que resulta el radicando del segundo miembro:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Ejemplo 9.9

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{81}} &= \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3, & \sqrt{\sqrt[3]{64}} &= \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2, \\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{1679616}}} &= \sqrt[8]{2^8 3^8} = 2 \cdot 3 = 6; \\ \sqrt[4]{6561} &= \sqrt{\sqrt{6561}} = \sqrt{81} = 9, & \sqrt[6]{4096} &= \sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[3]{64} = 4, \\ \sqrt[8]{6561} &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Extracción e introducción de factores de un radical.— Como la raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores, si el exponente de alguno de los factores del radicando es múltiplo del índice, podremos extraer del radical dicho factor, con sólo dividir su exponente por el índice. Para introducir un factor en un radical habrá que proceder de forma inversa, es decir, habrá que elevar el factor a la potencia que indica el índice.

Ejemplo 9.10

$$\begin{aligned} \sqrt{72} &= \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}, & \sqrt[3]{81a^9(x+y)^3} &= 3a^3(x+y)\sqrt[3]{3}, \\ \sqrt{8a^4b^2 + 16a^4b^4} &= \sqrt{8a^4b^2(1+2b^2)} = 2a^2b\sqrt{2(1+2b^2)}; \\ 2\sqrt{3} &= \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}, & 2a^2b\sqrt[3]{2ac} &= \sqrt[3]{16a^7b^3c}. \end{aligned}$$

Radicales semejantes.— Son aquellos que tienen el mismo índice y mismo radicando. Pueden diferir únicamente en el coeficiente que los multiplica.

Ejemplo 9.11

- $\sqrt{x-1}$, $3\sqrt{x-1}$, $2a\sqrt{x-1}$.
- $4\sqrt[3]{81a^3x}$, $2\sqrt[3]{192x}$ y $\sqrt[6]{9x^2}$ son semejantes ya que, simplificándolos, se transforman en $12a\sqrt[3]{3x}$, $8\sqrt[3]{3x}$ y $\sqrt[3]{3x}$, respectivamente.
- $\sqrt{45}$, $3\sqrt{20}$ y $2\sqrt{\frac{1}{5}}$ son semejantes, pues equivalen a $3\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$ y $\frac{2}{5}\sqrt{5}$, respectivamente.

9.4. Operaciones con radicales

Suma y sustracción.— La suma algebraica de varios *radicales semejantes* puede expresarse *sacando el radical como factor común de la suma algebraica de los coeficientes*. Si los radicales no son semejantes, la operación se deja indicada.

Ejemplo 9.12

$$\begin{aligned}
 1. \quad & y^2 \sqrt[3]{x^2y} - 2y \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{x^2y} = (y^2 - 2y + 1) \sqrt[3]{x^2y}. \\
 2. \quad & \sqrt[3]{54} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{250} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{128}{25}} - \sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \\
 & = 3\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = \\
 & = \left(3 + 5 - \frac{3}{2}\right) \sqrt[3]{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) \sqrt{2} = \frac{13}{2} \sqrt[3]{2} + \frac{21}{20} \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Multiplicación y división.— Para multiplicar o dividir varios radicales con el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos y se le coloca al resultado de la raíz el mismo índice. Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común y se aplica la regla anterior.

Ejemplo 9.13

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sqrt{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{64} \sqrt[12]{81} \sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{648000}. \\
 2. \quad & \sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = \sqrt[6]{\frac{x^3}{y^3}} \sqrt[6]{\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt[6]{\frac{x^3y^2}{y^3x^2}} = \sqrt[6]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[6]{xy^5}}{y}. \\
 3. \quad & \sqrt{\frac{3}{4}} : \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} : \frac{1}{4}} = \sqrt{3}. \\
 4. \quad & \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{a}.
 \end{aligned}$$

Racionalización de denominadores.— Suele ser frecuente que aparezcan en los cálculos expresiones fraccionarias cuyo denominador está constituido por una o varias *raíces cuadradas no exactas*. Los cálculos numéricos resultan más fáciles cuando se transforman dichas fracciones en otras equivalentes cuyo denominador sea un número entero. La operación mediante la cual se logra esto se denomina **racionalización de denominadores**. Se presentan dos casos:

- Si el denominador es un monomio se multiplican el numerador y el denominador por la raíz que aparece en el denominador. Es conveniente simplificar antes los radicales, si es pertinente, sacando fuera del radical los factores que sea posible.

Ejemplo 9.14

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}. \\
 2. \quad & \frac{3}{5\sqrt{18}} = \frac{3}{5\sqrt{9 \cdot 2}} = \frac{3}{15\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{15\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{30} = \frac{\sqrt{2}}{10}. \\
 3. \quad & \frac{6}{3\sqrt{5xy}} = \frac{2}{\sqrt{5xy}} = \frac{2\sqrt{5xy}}{\sqrt{5xy}\sqrt{5xy}} = \frac{2\sqrt{5xy}}{5xy}.
 \end{aligned}$$

El denominador de la fracción puede ser una raíz de índice cualquiera m . En este caso se multiplican tanto el numerador como el denominador por la raíz m -ésima de una expresión, cuyo producto por el radicando del denominador sea una potencia m -ésima perfecta:

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a \sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n} \sqrt[m]{b^{m-n}}} = \frac{a \sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}.$$

Ejemplo 9.15 $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt[3]{6^2}}{2\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{6^2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt[3]{6^2}}{12} = \frac{\sqrt[6]{5^3 6^4}}{12}.$

- Cuando el denominador es un binomio se multiplican numerador y denominador por el binomio *conjugado* del denominador, el cual se obtiene cambiando el signo de uno de los términos. Así, el conjugado de $a + \sqrt{b}$ es $a - \sqrt{b}$ o bien $-a + \sqrt{b}$. Al operar de esta forma, resultará en el denominador una

suma · diferencia = diferencia de cuadrados,

con lo que desaparecerán las raíces cuadradas.

Ejemplo 9.16

$$\begin{aligned} 1. \frac{1}{\sqrt{2}-1} &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1. \\ 2. \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{(5\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{20-7\sqrt{6}+3}{4\cdot 2-3} = \frac{23-7\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

Simplificación de radicales.– Simplificar un radical es escribirlo de la forma más sencilla posible, para lo cual se han de practicar las operaciones siguientes:

- *Hacer que el índice y el exponente sean primos entre sí*, lo cual se logra dividiendo el índice y los exponentes por su m.c.d.

Ejemplo 9.17

$$\begin{aligned} 1. \sqrt[4]{9} &= \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}. \\ 2. \sqrt[8]{64a^4b^6c^2} &= \sqrt[8]{(2^3a^2b^3c)^2} = \sqrt[4]{2^3a^2b^3c}. \end{aligned}$$

- *Extraer del radical todos los factores posibles.*

Ejemplo 9.18

$$\begin{aligned} 1. \sqrt{27a^3} &= \sqrt{9a^2}\sqrt{3a} = 3a\sqrt{3a}. \\ 2. \frac{1}{4}\sqrt{128} &= \frac{1}{4}\sqrt{64\cdot 2} = \frac{1}{4}8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \\ 3. \sqrt[3]{27x^8-108x^6y^2} &= \sqrt[3]{27x^6(x^2-4y^2)} = 3x^2\sqrt[3]{x^2-4y^2}. \end{aligned}$$

- *Hacer que el radicando no contenga ninguna fracción.*

Ejemplo 9.19

$$\begin{aligned} 1. \sqrt{\frac{3}{5}a^3} &= \sqrt{\frac{3}{5}\frac{5}{5}a^3} = \sqrt{\frac{15}{25}a^3} = \frac{a}{5}\sqrt{15a}. \\ 2. \sqrt[3]{\frac{16}{25}} &= \sqrt[3]{\frac{16}{25}\frac{5}{5}} = \sqrt[3]{\frac{80}{125}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}}10 = \frac{2}{5}\sqrt[3]{10}. \end{aligned}$$

$$3. \sqrt{\frac{5}{7x}} = \sqrt{\frac{5}{7x} \cdot \frac{7x}{7x}} = \sqrt{\frac{35x}{49x^2}} = \sqrt{\frac{1}{49x^2} 35x} = \frac{1}{7x} \sqrt{35x}.$$

Potencias de exponente fraccionario.— Ya vimos anteriormente que podíamos escribir $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Esta igualdad se puede generalizar como sigue:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n},$$

esto es, todo número afectado de exponente fraccionario representa un radical que tiene por índice el denominador de la fracción y por radicando la base de la potencia con exponente igual al numerador.

Ejemplo 9.20 $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $(ab^2)^{2/3} = \sqrt[3]{(ab^2)^2} = \sqrt[3]{a^2b^4} = b\sqrt[3]{a^2b}$.

10. Notación científica

La **notación científica** consiste en expresar números decimales haciendo uso de potencias de 10, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} & \vdots = \vdots \\ 10^{-4} &= 0'0001 \\ 10^{-3} &= 0'001 \\ 10^{-2} &= 0'01 \\ 10^{-1} &= 0'1 \\ 10^0 &= 1 \\ 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \\ 10^4 &= 10000 \\ & \vdots = \vdots \end{aligned}$$

Un número escrito en notación científica debe tener un único número como parte entera y el resto debe ser decimal. Así, para expresar un número cualquiera en notación científica habrá que tener en cuenta si el número, en valor absoluto, es mayor o menor que uno:

- Si es mayor que uno, se “correrá la coma” hacia la izquierda dejando una única cifra entera no nula, y se multiplicará por una potencia positiva de 10 cuyo exponente es el número de lugares que se ha “corrido la coma”.

Ejemplo 10.1 $524 = 524'0 = 5'24 \cdot 10^2$, $2365'78 = 2'36578 \cdot 10^3$, $-54834'1 = -5'48134 \cdot 10^4$.

- Si es menor que uno, se “correrá la coma” hacia la derecha dejando una única cifra entera no nula, y se multiplicará por una potencia negativa de 10 cuyo exponente es el número de lugares que se ha “corrido la coma”.

Ejemplo 10.2 $0'00023 = 2'3 \cdot 10^{-4}$, $0'05497 = 5'497 \cdot 10^{-2}$, $-0'00987 = -9'87 \cdot 10^{-3}$.

11. Ejercicios propuestos

(1) Realiza las siguientes operaciones:

a) $-2\{3 + 5[9(-5 + 4) - 3] + 4\}$;

- b) $\frac{1}{2} \left[-4 \left(2 + \frac{3}{2} \right) \right] - \frac{3}{4}$;
 c) $\left(\frac{3}{2} - 4 \right) : \left(1 - \frac{8}{3} \right) + \frac{1}{2}$;
 d) $\left[\left(\frac{2}{3} - 1 \right) : \left(4 - \frac{5}{6} \right) - 2 \left(\frac{1}{3} + 4 \right) \left(\frac{2}{5} - \frac{7}{25} \right) \right] - \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + 4 \right) \right] \right\}$.

(2) Representa en la recta real los siguientes intervalos:

$$(-3, +\infty), [4, 8), (-\infty, 1), [-5, -2], (0, 5).$$

(3) Reduce las siguientes expresiones a una sola potencia, aplicando las propiedades de las potencias:

- a) $(-3)^2(-3)^3(-3)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2}$;
 b) $[(-3)^2]^3$, $(-3^2)^3$, $(-1^4)^3$;
 c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5$, $\left\{ [(-3^2)^3]^5 \right\}^3$, $\left\{ [(-0'1)^3]^3 \right\}^3$;
 d) $(-4)^5 : (-4)^3$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{3}\right)$.

(4) Calcula las potencias siguientes:

- a) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)\right]^3$, $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \frac{6}{5}(-5)\right]^4$;
 b) $\left(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}\right)^3$, $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \frac{3}{4}\right]^5$;
 c) $\left[\frac{3^2(-2)}{6}\right]^2$, $\left[\frac{(-2)(-3)^3}{9}\right]^2$.

(5) Resuelve las siguientes expresiones:

- a) $\left\{ \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^3 \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \right]^3 : \left(-\frac{3}{5}\right)^{15} \right\} - \left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^4$;
 b) $\left\{ \left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(-1 + \frac{1}{4}\right) \right]^2 : \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \right\} + \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^2 \left(-\frac{5}{3}\right) \right] \left(\frac{5}{4} + 10\right)$;
 c) $\left[\left(\frac{3}{2} - 4\right) : \left(1 - \frac{8}{3}\right) + \frac{1}{2} \right]^4 - \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2$.

(6) Calcula las potencias con exponente negativo:

- a) 3^{-2} , $(-3)^{-2}$, $(-2)^{-1}$, $(\sqrt{3})^{-1}$;
 b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$;
 c) $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{5} - 2\right)^{-2}$, $\left(\frac{16}{5} - 1'2\right)^{-3}$.

(7) Busca tres formas distintas para cada radical:

$$\sqrt[3]{4a^4}, \quad \sqrt[15]{8a^3}, \quad \sqrt[6]{0'027}, \quad \sqrt[8]{16a^4}.$$

(8) Reduce los siguientes radicales al mínimo índice común:

a) $\sqrt[3]{n^2}, \quad \sqrt[4]{m^3}, \quad \sqrt[6]{n^5};$

b) $\sqrt{a^3}, \quad \sqrt[4]{m}, \quad \sqrt[5]{n^5}, \quad \sqrt[10]{a^3};$

c) $\sqrt[3]{5xy^2}, \quad \sqrt{6x^3z}, \quad \sqrt[6]{\frac{3xy^3}{2z}}.$

(9) Calcula las siguientes raíces de la forma más sencilla posible:

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64}, \quad \sqrt[5]{243 \cdot 32 \cdot 0'00001}, \quad \sqrt{49 \cdot 121 \cdot 169};$

b) $\sqrt{25 : 0'0001}, \quad \sqrt[3]{8 : 0'064}, \quad \sqrt[4]{20736 : 256}, \quad \sqrt[5]{243 : 32};$

c) $\sqrt{49^3}, \quad \sqrt[3]{0'064^2}, \quad \sqrt[3]{2197^4}, \quad \sqrt[4]{6561^3}.$

(10) Realiza las siguientes operaciones indicadas:

a) $\sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}}};$

b) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}};$

c) $\sqrt{3a^2 + \sqrt{6a^4 - \sqrt{25a^8}}};$

d) $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32}.$

(11) Extrae los factores del radical:

a) $\sqrt{8}, \quad \sqrt{12}, \quad \sqrt[3]{16}, \quad \sqrt[3]{54}, \quad \sqrt[5]{64};$

b) $\sqrt{\frac{27}{4}}, \quad \sqrt[5]{\frac{5x^{10}}{y^8}}, \quad \sqrt[3]{\frac{8x^4y^3z}{n^6}};$

c) $3\sqrt{8a^3}, \quad 2x^2y\sqrt{x^4y^3}, \quad \frac{xy^2}{3}\sqrt{27xy^3}.$

(12) Introduce el coeficiente en el radical y simplifica:

a) $7\sqrt{a}, \quad 2a\sqrt{3a}, \quad x\sqrt{\frac{1}{x}}, \quad x^3y\sqrt{xy};$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{27}{2}}, \quad \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{2}{a}\sqrt{\frac{ax}{2}}, \quad \frac{3}{2xy}\sqrt{\frac{2xz}{y}};$

c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{81}{4}}, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{4}{81}};$

d) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad (1-a)\sqrt{2a-a^2}, \quad (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}.$

(13) Demuestra que los siguientes radicales son semejantes:

a) $5\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{8}, \quad \sqrt{18};$

$$\text{b) } \sqrt{3a^2}, \quad \sqrt{27}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad 2\sqrt{\frac{4}{27}};$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{81}, \quad \sqrt[3]{24}, \quad \sqrt[6]{9}, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}a^3}.$$

(14) Efectúa las siguientes adiciones y sustracciones:

$$\text{a) } 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}, \quad 3\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 3\sqrt{18}, \quad 2a\sqrt{3} - \sqrt{27a^2} + a\sqrt{12};$$

$$\text{b) } 4\sqrt{12} - \frac{3}{2}\sqrt{48} + \frac{2}{3}\sqrt{27} + \frac{3}{5}\sqrt{75}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27}, \quad \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54};$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{6} + \sqrt{\frac{1}{6}}, \quad 2\sqrt{80} + \frac{14}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}} - \sqrt{8} - \frac{9}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{81}};$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{1}{2x}} + \sqrt{8x}, \quad \sqrt{4a - 8b} - \sqrt{9a - 18b} + 2\sqrt{16a - 32b};$$

$$\text{e) } 3\sqrt[3]{\frac{2x}{9}} - 2\sqrt[3]{\frac{3x}{4}} + 5\sqrt[3]{\frac{6x}{125}}, \quad \frac{cd}{a}\sqrt{\frac{a^6}{cd}} - \frac{b^2d}{a}\sqrt{\frac{4a^4c}{b^2d}} + \frac{d^2}{c}\sqrt{\frac{b^4c^3}{d^3}};$$

$$\text{f) } (x - y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{9x^2 - 9y^2} + \frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{25xy^2 - 25y^3}{x+y}}.$$

(15) Realiza las siguientes operaciones indicadas:

$$\text{a) } \sqrt{a}\sqrt[3]{a}, \quad \sqrt{2a}\sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{a}\sqrt[4]{2a};$$

$$\text{b) } 2\sqrt{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}), \quad \sqrt{12}\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{12}{5}}\sqrt{\frac{15}{4}};$$

$$\text{c) } (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}), \quad \sqrt[3]{x-y}\sqrt{x-y}\sqrt[3]{27x-27y};$$

$$\text{d) } (\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2})(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b^2}), \quad \sqrt{xy}(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2y});$$

$$\text{e) } \sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt{\frac{1}{x-1}}, \quad (a - \sqrt{b})(a + \sqrt[3]{b^2});$$

$$\text{f) } \left(\sqrt{\frac{a}{2b}}\sqrt[3]{\frac{4b^2}{a^2}}\right) : \sqrt{\frac{2b}{a}}, \quad \sqrt[6]{12}(5\sqrt{3} : \sqrt[3]{9}) - \left(\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{\frac{4}{3}}\right);$$

$$\text{g) } \sqrt{2a} : \sqrt[3]{\frac{1}{4a^2}}, \quad \sqrt{8a^5bc^4} : \left(\frac{3}{2}a\sqrt{ab^2c^6}\right);$$

$$\text{h) } \frac{\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} : \sqrt{a}}{\frac{6\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}} : \sqrt[8]{a}}, \quad \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} : \sqrt[4]{a^3}}{\frac{\sqrt[6]{a^5}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[8]{a^7}}}.$$

(16) Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}, \quad \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$\text{b) } \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}, \quad \frac{3}{2\sqrt[3]{4}};$$

$$\text{c) } \frac{3y}{x\sqrt{y}}, \quad \frac{x\sqrt{y}}{y\sqrt{x}}, \quad \frac{2\sqrt{12}}{5\sqrt{3}};$$

$$\begin{aligned} \text{d)} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{3\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}, \quad \frac{3xy^2}{\sqrt[3]{x^2y}}; \\ \text{e)} & \frac{2+x}{\sqrt{2+x}}, \quad \frac{6(3-y)}{\sqrt[3]{(3-y)^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}; \\ \text{f)} & \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{5}}, \quad \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}; \\ \text{g)} & \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \quad \frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{2}-\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

(17) Escribe bajo radical único y simplifica los resultados:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{\sqrt{8}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}, \quad \sqrt[3]{\sqrt{32}}; \\ \text{b)} & \sqrt[3]{3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}, \quad 3\sqrt[3]{3\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{3^3}}, \quad \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{4}}; \\ \text{c)} & \sqrt{a\sqrt{a}}, \quad \sqrt{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, \quad \sqrt[4]{b\sqrt[3]{\frac{1}{b}}\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{\frac{1}{b}}}; \\ \text{d)} & \sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}, \quad \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\sqrt{b}}\sqrt{b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}}. \end{aligned}$$

(18) Escribe sin radical las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{a}, \quad \sqrt{3^3}, \quad \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt[4]{ab^2}, \quad \sqrt[5]{a+b}; \\ \text{b)} & \sqrt[3]{1-\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[4]{a\sqrt{a}}, \quad \sqrt[5]{\frac{a+1}{a-1}}, \quad \sqrt[4]{a+\sqrt{a}}; \\ \text{c)} & \frac{3\sqrt{2}\sqrt[3]{2x}}{3\sqrt{3x^3}}, \quad \frac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}, \quad \frac{2b\sqrt[3]{3x}}{3\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(19) Formula las siguientes expresiones sin exponente fraccionario ni negativo:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 3^{2/3}, \quad 2a^{1/4}, \quad (3a)^{2/5}; \\ \text{b)} & 3 \cdot 2^{5/2}, \quad (2-x)^{5/2}, \quad 3^{-1/2} - 4^{2/3}; \\ \text{c)} & 2^{2/3}, \quad (3-x)^{-1/2}; \\ \text{d)} & 3a^{3/2} [5^{2/3}(3ab^2-5)^{3/2}], \quad 3a^{1/2}b^{-1/2}c^{3/4}. \end{aligned}$$