



UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS

para estudiantes de primer curso
de facultades y escuelas técnicas

Tema 9

Derivabilidad. Aplicaciones. Diferencial de una función en un punto

Índice

1. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica	1
2. Derivadas de las funciones elementales. Álgebra de derivadas	3
3. Derivación de la composición de funciones: la regla de la cadena	6
4. Derivación logarítmica	10
5. Derivadas sucesivas	11
6. Aplicaciones del cálculo diferencial. Estudio local de funciones	11
6.1. Crecimiento y decrecimiento de una función	12
6.2. Puntos críticos de una función. Máximos y mínimos	13
6.2.1. Condición necesaria de extremo local	14
6.2.2. Condiciones suficientes de extremo local	14
6.3. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión	15
6.4. Problemas de máximos y mínimos	17
7. Diferencial de una función en un punto	19
8. Ejercicios propuestos	19

1. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

El problema geométrico que originó la teoría de las derivadas, esto es, el **Cálculo Diferencial**, fue la determinación de las tangentes a las curvas. Teniendo en cuenta la figura 1, dada una curva y

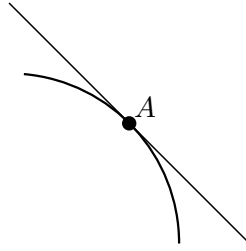


Figura 1: Recta tangente a una curva.

un punto de ella, A , la **recta tangente** a dicha curva en el punto A es la única recta que corta a la curva en A .

Ahora bien, la gráfica de una función es una curva y, como tal, podemos plantearnos el problema de calcular la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Para ello, consideremos una función $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in D$ un punto de modo que existe un número real $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset D$.

Centrémonos en la figura 2, en la que podemos ver la representación gráfica de la función f . Hemos denotado por t a la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a , que forma un ángulo α con la horizontal, y se ha dibujado la recta AA_h , siendo $h > 0$ un número real cualquiera *suficientemente pequeño*, siendo $A(a, f(a))$, $A_h(a + h, f(a + h))$ y $B_h(a + h, f(a))$.

La pendiente de la recta AA_h , que no es más que la tangente del ángulo que dicha recta forma con la horizontal, viene dada por¹

$$m_h = \frac{|\overline{A_h B_h}|}{|\overline{A B_h}|} = \frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Cuando $h \rightarrow 0$, $a + h \rightarrow a$ y $f(a + h) \rightarrow f(a)$, con lo que $A_h \rightarrow A$ y $B_h \rightarrow A$, es decir, la recta AA_h se irá aproximando a la recta tangente a la curva $y = f(x)$, t . Por lo tanto, si m es la pendiente de t , esto es, si $m = \operatorname{tg} \alpha$, tendremos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} m_h = m \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = m.$$

En caso de que exista este límite, se dirá que la función f es **derivable** en el punto a , y escribiremos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = m = f'(a).$$

Si $x = a + h$ —véase figura 2—, entonces $h = x - a$ y decir que $h \rightarrow 0$ será lo mismo que decir que $x \rightarrow a$, y la expresión anterior será equivalente a esta otra:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m = f'(a).$$

Todo lo anterior se resume en la siguiente

¹Dados dos puntos A y B del plano, se denotará por \overline{AB} al segmento de extremos A y B , y la longitud de dicho segmento se escribirá $|\overline{AB}|$.

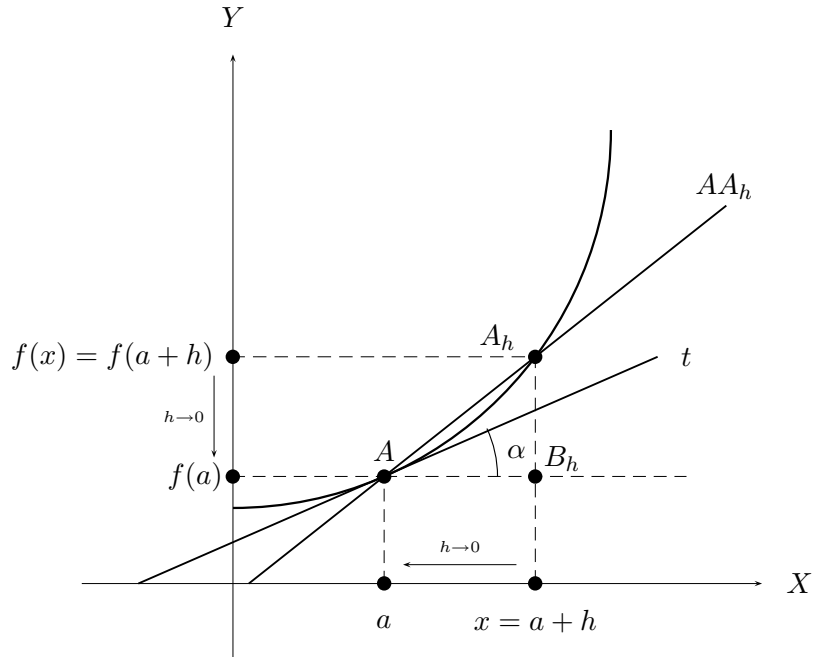


Figura 2: Recta tangente a la gráfica de una función.

Definición 1.1 Sean $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D$ un punto de modo que existe un número real $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset D$. Si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

diremos que la función f es **derivable** en el punto a o que existe la derivada de f en el punto a , y dicho límite se denotará por $f'(a)$.

De esta manera, si f es derivable en el punto a , la ecuación en punto pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa a vendrá dada por

$$t : y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Definición 1.2 Bajo las hipótesis de la definición anterior, si f es derivable en cada punto de un subconjunto S de su dominio D , se dirá que f es **derivable** en S .

Teniendo en cuenta la definición 1.2, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f' : S \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

a la que llamaremos **función derivada** de f .

Por otro lado, la derivada de una función f indica, en cierto modo, cómo varía la función cuando varía la variable independiente x en cuanto a la rapidez o lentitud de crecimiento o decrecimiento de la función. La figura 3 puede servirnos para ilustrar este hecho, en la que se ha representado gráficamente la función exponencial $y = f(x) = 2^x$: Nótese que, a medida que crece x a lo largo del eje de abscisas, las rectas tangentes en dichos puntos van teniendo una pendiente mayor, y esto coincide con un crecimiento más rápido de la función. Esto nos da pie a pensar que la derivada de una función y el crecimiento o decrecimiento de ésta están íntimamente ligados. Este hecho se estudiará en una sección posterior de este tema.

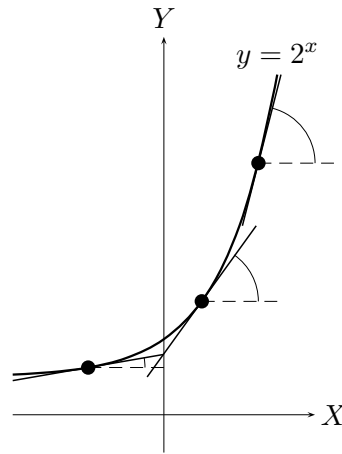


Figura 3: Relación entre la recta tangente y el crecimiento una función.

2. Derivadas de las funciones elementales. Álgebra de derivadas

En la tabla 1 se exponen las derivadas de las funciones elementales, pues el uso de la definición nos puede llevar a realizar cálculos excesivamente complicados:

$f(x)$	$f'(x)$
$C \in \mathbb{R}$	0
x^k	kx^{k-1}
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\text{sen } x$	$\text{cos } x$
$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$
$\text{arcsen } x, x \in [-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arc cos } x, x \in [-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arc tg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Tabla 1: Derivadas de las funciones elementales.

En cuanto al álgebra de derivadas, se tiene que, si f y g son dos funciones derivables y $C \in \mathbb{R}$, entonces

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

- $(Cf)'(x) = Cf'(x)$;
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Ejemplo 2.1 Para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva correspondiente a la función $f(x) = 3x^2 + 1$ en el punto de abscisa -1 , debemos hacer:

$$f'(x) = (3x^2 + 1)' = (3x^2)' + (1)' = 3(x^2)' + 0 = 3 \cdot 2x = 6x \implies f'(-1) = -6,$$

es decir, la pendiente de la recta es igual a -6 . Entonces, la ecuación de dicha recta vendrá dada por

$$y - f(-1) = -6(x + 1) \iff y - 4 = -6(x + 1).$$

Ejemplo 2.2

1) Calculemos la derivada de la función $f(x) = x^4 + \operatorname{sen} x$. Obsérvese en primer lugar que f es la suma de dos funciones, con lo que

$$f'(x) = (x^4 + \operatorname{sen} x)' = (x^4)' + (\operatorname{sen} x)' = 4x^{4-1} + \cos x = 4x^3 + \cos x.$$

2) La derivada de la función $f(x) = 3e^x - 4x^5$ será

$$f'(x) = (3e^x - 4x^5)' = (3e^x)' - (4x^5)' = 3(e^x)' - 4(x^5)' = 3e^x - 4 \cdot 5x^4 = 3e^x - 20x^4.$$

3) Si $f(x) = \ln x \operatorname{tg} x$ entonces

$$f'(x) = (\ln x \operatorname{tg} x)' = (\ln x)' \operatorname{tg} x + \ln x (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{x} \operatorname{tg} x + \ln x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{x} + \frac{\ln x}{\cos^2 x}.$$

4) Consideremos la función $f(x) = 2xe^x - \operatorname{arcsen} x$. Para calcular su derivada debemos tener en cuenta que f es la suma de dos funciones, la primera de las cuales está formada el producto de un número por dos funciones. De este modo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2xe^x - \operatorname{arcsen} x)' = (2xe^x)' - (\operatorname{arcsen} x)' = 2(xe^x)' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2[(x)'e^x + x(e^x)'] - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2(1 \cdot e^x + xe^x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2e^x(1+x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

5) Derivemos la función $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2 \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(2 \ln x)'x^2 - 2 \ln x(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2(\ln x)'x^2 - 2 \ln x(2x)}{x^4} \\ &= \frac{2 \frac{1}{x} x^2 - 4x \ln x}{x^4} = \frac{2x - 4x \ln x}{x^4} = \frac{2x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{2(1 - 2 \ln x)}{x^3}. \end{aligned}$$

- 6) Para derivar la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$, téngase en cuenta que tanto el numerador como el denominador son sumas de dos funciones, de manera que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \right)' \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)'(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)'}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x} \\ &= \frac{-(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{1 - \operatorname{sen} 2x} = \frac{-(1 - \operatorname{sen} 2x) - (1 + \operatorname{sen} 2x)}{1 - \operatorname{sen} 2x} \\ &= \frac{-1 + \operatorname{sen} 2x - 1 - \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x} = \frac{-2}{1 - \operatorname{sen} 2x}. \end{aligned}$$

- 7) Para calcular la derivada de $f(x) = \frac{x^5 + 3x^2}{\ln x} + 2^x 3^x$, escribamos antes la función como

$$f(x) = \frac{x^5 + 3x^2}{\ln x} + 6^x,$$

la cual es la suma de dos funciones: el primer sumando es un cociente de funciones y el segundo es una función exponencial. Así,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^5 + 3x^2}{\ln x} + 6^x \right)' = \left(\frac{x^5 + 3x^2}{\ln x} \right)' + (6^x)' \\ &= \frac{(x^5 + 3x^2)' \ln x - (x^5 + 3x^2)(\ln x)'}{\ln^2 x} + 6^x \ln 6 \\ &= \frac{(5x^4 + 6x) \ln x - (x^5 + 3x^2) \frac{1}{x}}{\ln^2 x} + 6^x \ln 6 \\ &= \frac{(5x^4 + 6x) \ln x - (x^4 + 3x)}{\ln^2 x} + 6^x \ln 6. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 Halleemos la recta tangente a la curva $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ en el punto de abscisa $\frac{\pi}{2}$. Ya conocemos la derivada de esta función, que se calculó en el apartado 6) del ejemplo anterior: $y' = f'(x) = \frac{-2}{1 - \operatorname{sen} 2x}$. Entonces, la recta viene dada por

$$y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Tenemos primeramente que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

En segundo lugar,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2}{1 - \operatorname{sen} 2 \frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{1 - \operatorname{sen} \pi} = \frac{-2}{1 - 0} = -2.$$

En consecuencia, la recta tangente tiene por ecuación la que sigue:

$$y - 1 = -2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Derivación de la composición de funciones: la regla de la cadena

Consideremos dos funciones $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : T \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D = \text{dom}(f)$ y $T = \text{dom}(g)$, tales que $f(D) \subset T$.

Teorema 3.1 (Regla de la cadena) *Si f es derivable en un punto $a \in D$ y g es derivable en $f(a)$ entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en el punto a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

De forma más general, si f y g son dos funciones derivables –en los conjuntos donde lo sean–, se tendrá que

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)}.$$

Ejemplo 3.1 Derivemos la función $h(x) = \sqrt{x^4 - \text{sen } x}$. Nótese que h es la composición de las funciones $f(x) = x^4 - \text{sen } x$ y $g(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, siendo $h = g \circ f$. Así,

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - \cos x, \\ g'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned} \right\} \implies h'(x) = g'(f(x)) f'(x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}(4x^3 - \cos x) = \frac{4x^3 - \cos x}{2\sqrt{x^4 - \text{sen } x}}.$$

Ejemplo 3.2 La función $h(x) = \text{arctg}(\ln x)$ es composición de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \text{arctg } x$, con $h = g \circ f$. Para derivarla, hacemos

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}, \\ g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned} \right\} \implies h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = \frac{1}{1+f(x)^2} \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{1+\ln^2 x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

Para facilitar el cálculo de la derivada de la composición de funciones, se presenta a continuación una tabla análoga a la tabla 1. De este modo, si f es una función derivable y h es la composición de f con la función elemental correspondiente, tendremos que

$h(x)$	$h'(x)$
$f(x)^k$	$k f(x)^{k-1} f'(x)$
$a^{f(x)}, a > 0$	$a^{f(x)} \ln a f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
$\ln f(x), f(x) > 0$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\text{sen } f(x)$	$\cos f(x) f'(x)$
$\cos f(x)$	$-\text{sen } f(x) f'(x)$
$\text{tg } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$\arcsen f(x), f(x) \in [-1, 1]$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\text{arc cos } f(x), f(x) \in [-1, 1]$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\text{arc tg } f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Tabla 2: Derivadas de la composición de una función cualquiera con las funciones elementales.

Observación 3.1 La tabla 1 es, en realidad, un caso particular de la tabla 2. Efectivamente, si $f(x) = x$ en la tabla 2 obtenemos la tabla 1.

Ejemplo 3.3

1) Para derivar la función $y = \text{sen}^3 x - \text{sen } x^3$ procedemos de la manera siguiente:

$$y' = (\text{sen}^3 x - \text{sen } x^3)' = \underbrace{(\text{sen}^3 x)'}_{(A)} - \underbrace{(\text{sen } x^3)'}_{(B)}.$$

Tenemos por una lado que (A) es la derivada de la composición de la función elemental es x^3 y $f(x) = \text{sen } x$, de modo que

$$(A) = 3 \text{sen}^2 x (\text{sen } x)' = 3 \text{sen}^2 x \cos x;$$

por otro lado (B) es la derivada de la composición de la función $f(x) = x^3$ con la función seno, con lo que

$$(B) = \cos x^3 (x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Finalmente,

$$y' = (A) - (B) = 3 \text{sen}^2 x \cos x - 3x^2 \cos x^3 = 3(\text{sen}^2 x \cos x - x^2 \cos x^3).$$

2) Calculemos ahora la derivada de la función $h(x) = \ln(x^2 - 1)$, donde es $f(x) = x^2 - 1$:

$$h'(x) = \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

- 3) La derivada de la función $y = e^{2x^2+x}$ será

$$y' = e^{2x^2+x}(2x^2 + x)' = e^{2x^2+x}(4x + 1).$$

- 4) Hallemos $h'(x)$, con $h(x) = \arcsen(e^x)$. En este caso es $f(x) = e^x$ y por lo tanto

$$h'(x) = \frac{(e^x)'}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$$

- 5) Calculemos la derivada de la función $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2}$, donde ahora es $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{\frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2}}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}}{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}} \\ &= \frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

- 6) Para derivar la función $y = 2x^2 \cos(\ln x)$ debemos tener en cuenta que dicha función es el producto de un número por dos funciones, la segunda de las cuales es la composición de otras dos, de modo que lo primero que hay que aplicar es la derivada del producto. Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 \cos(\ln x))' = 2(x^2 \cos(\ln x))' = 2[(x^2)' \cos(\ln x) + x^2 (\cos(\ln x))'] \\ &= 2 \left[2x \cos(\ln x) + x^2 \underbrace{(\cos(\ln x))'}_{(A)} \right]. \end{aligned}$$

Es precisamente en (A) donde hay que aplicar la regla de la cadena, siendo $f(x) = \ln x$:

$$(A) = -\operatorname{sen}(\ln x)(\ln x)' = \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x}.$$

Por fin se obtiene

$$y' = 2 \left[2x \cos(\ln x) + x^2 \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x} \right] = 2x [2 \cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)].$$

- 7) Derivemos la función $h(x) = \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right)$. Teniendo en cuenta que en este caso es $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right)'}{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{(1 + \operatorname{sen} x)'(1 - \operatorname{sen} x) - (1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)'}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}}{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \\ &= \frac{\frac{\cos x(1 - \operatorname{sen} x) - (1 + \operatorname{sen} x)(-\cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}}{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}}{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \\ &= \frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{2 \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}. \end{aligned}$$

8) Sea $y = \sqrt[3]{\sen^2 x - \cos^2 2x} = (\sen^2 x - \cos^2 2x)^{1/3}$. Entonces

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(\sen^2 x - \cos^2 2x)^{\frac{1}{3}-1}(\sen^2 x - \cos^2 2x)' \\ &= \frac{1}{3}(\sen^2 x - \cos^2 2x)^{-\frac{2}{3}} \underbrace{(\sen^2 x - \cos^2 2x)'}_{(A)}. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (A) &= (\sen^2 x)' - (\cos^2 2x)' = 2 \sen x(\sen x)' - 2 \cos 2x(\cos 2x)' \\ &= 2 \sen x \cos x - 2 \cos 2x \underbrace{(\cos 2x)'}_{-\sen 2x(2x)' = -2 \sen 2x} = \sen 2x + 2 \sen 4x. \end{aligned}$$

Finalmente, resulta ser

$$y' = \frac{\sen 2x + 2 \sen 4x}{3 \sqrt[3]{(\sen^2 x - \cos^2 2x)^2}}.$$

9) Consideremos la función $h(x) = \arccos \sqrt{\frac{x-4}{x+4}}$. Entonces

$$h'(x) = -\frac{\left(\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}\right)^2}} = \frac{\overbrace{\left(\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{1/2}\right)'}^{(A)}}{\sqrt{1 - \frac{x-4}{x+4}}}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} (A) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{-1/2} \left(\frac{x-4}{x+4}\right)' \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} \frac{(x-4)'(x+4) - (x-4)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} \frac{x+4 - x+4}{(x+4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} \frac{8}{(x+4)^2} = \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} \frac{4}{(x+4)^2} = \frac{4}{(x-4)^{1/2}(x+4)^{3/2}}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{4}{(x-4)^{1/2}(x+4)^{3/2}} = \frac{4}{(x-4)^{1/2}(x+4)^{3/2}} = \frac{4}{(x-4)^{1/2}(x+4)^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{x-4}{x+4}}}{\sqrt{1 - \frac{x-4}{x+4}}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{x+4}}}{\sqrt{\frac{8}{x+4}}} = \frac{2\sqrt{2}}{(x+4)^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x+4)^{1/2}}{(x-4)^{1/2}(x+4)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{(x-4)^{1/2}(x+4)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-4}(x+4)}. \end{aligned}$$

10) Hallemos la derivada de la función $y = \frac{\cos x}{2 \sen^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$. Empecemos por escribir que

$$y' = \underbrace{\left(\frac{\cos x}{2 \sen^2 x}\right)'}_{(A)} - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)\right)'}_{(B)}.$$

En primer lugar se tiene que

$$\begin{aligned} (A) &= \frac{(\cos x)'2 \operatorname{sen}^2 x - \cos x(2 \operatorname{sen}^2 x)'}{4 \operatorname{sen}^4 x} = \frac{(-\operatorname{sen} x)2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \cos x(\operatorname{sen}^2 x)'}{4 \operatorname{sen}^4 x} \\ &= \frac{-2 \operatorname{sen}^3 x - 2 \cos x \cdot 2 \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x)'}{4 \operatorname{sen}^4 x} = \frac{-2 \operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x)}{4 \operatorname{sen}^4 x} \\ &= \frac{\overbrace{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x)}^{=1}}{2 \operatorname{sen}^3 x} = \frac{-1 - \cos^2 x}{2 \operatorname{sen}^3 x}. \end{aligned}$$

En segundo lugar,

$$(B) = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} y' &= (A) - \frac{1}{2}(B) = \frac{-1 - \cos^2 x}{2 \operatorname{sen}^3 x} - \frac{1}{2 \operatorname{sen} x} = \frac{-1 - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen}^3 x} \\ &= \frac{-1 - \overbrace{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}^{=1}}{2 \operatorname{sen}^3 x} = \frac{-2}{2 \operatorname{sen}^3 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^3 x}. \end{aligned}$$

4. Derivación logarítmica

Sean f y g dos funciones reales de variable real tales que $f(x) > 0$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$. Lo que haremos aquí es derivar la función **potencial-exponencial**

$$h(x) = f(x)^{g(x)}.$$

Se ha impuesto la positividad de la función f para que la función h esté bien definida².

Por las propiedades de los logaritmos tenemos que $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$, de modo que podemos expresar la función h como

$$h(x) = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Así, a la hora de derivar la función h haremos lo siguiente:

$$h'(x) = \left(e^{g(x) \ln f(x)} \right)' = e^{g(x) \ln f(x)} \overbrace{(g(x) \ln f(x))'}^{(A)}.$$

Ahora bien, (A) es la derivada del producto de dos funciones: $f(x)$ y $\ln g(x)$, con lo que

$$(A) = g'(x) \ln f(x) + g(x) (\ln f(x))' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \overbrace{e^{g(x) \ln f(x)}}^{=f(x)^{g(x)}} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

²Recuérdese que la función exponencial a^x está definida para $a > 0$.

Ejemplo 4.1 Calculemos la derivada de la función $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$. Para ello, expresamos la función como $f(x) = e^{\operatorname{tg} x \ln x}$, de manera que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\operatorname{tg} x \ln x} \right)' = \overbrace{e^{\operatorname{tg} x \ln x}}^{=x^{\operatorname{tg} x}} (\operatorname{tg} x \ln x)' = x^{\operatorname{tg} x} [(\operatorname{tg} x)' \ln x + \operatorname{tg} x (\ln x)'] \\ &= x^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2 Para derivar la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x^2+x}$ escribámosla primeramente en la forma

$$f(x) = e^{(x^2+x) \ln(\operatorname{sen} x)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{(x^2+x) \ln(\operatorname{sen} x)} \right)' = \overbrace{e^{(x^2+x) \ln(\operatorname{sen} x)}}^{(\operatorname{sen} x)^{x^2+x}} [(x^2+x) \ln(\operatorname{sen} x)]' \\ &= (\operatorname{sen} x)^{x^2+x} \left[(2x+1) \ln(\operatorname{sen} x) + (x^2+x) \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right]. \end{aligned}$$

5. Derivadas sucesivas

Hasta ahora hemos visto que, derivando una función $f(x)$, se obtiene otra función $f'(x)$ que, como función que es, también podría derivarse, resultando así la denominada **derivada segunda** de f , y que se denotará por f'' . Ésta es una nueva función que de nuevo podría derivarse, obteniéndose entonces la llamada **derivada tercera** de f , y que se denotará por f''' . Este proceso de derivación se denomina cálculo de las **derivadas sucesivas** de f .

Ejemplo 5.1 Sea $f(x) = x^4 - 3 \operatorname{sen} x$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 3 \cos x, & f''(x) &= 12x^2 + 3 \operatorname{sen} x, & f'''(x) &= 24x + 3 \cos x, \\ f^{(iv)}(x) &= 24 - 3 \operatorname{sen} x, & f^{(v)}(x) &= -3 \cos x, & f^{(vi)}(x) &= 3 \operatorname{sen} x, \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Como se muestra en el ejemplo anterior, en el que se ha calculado hasta la derivada sexta de f , se puede seguir derivando hasta el infinito.

6. Aplicaciones del cálculo diferencial. Estudio local de funciones

Las aplicaciones fundamentales del cálculo diferencial residen en el estudio del crecimiento o decrecimiento de una función así como de la concavidad y convexidad de aquélla en un intervalo. Este estudio conlleva además la determinación de los máximos, mínimos y puntos de inflexión que dicha función pudiera poseer.

La utilidad básica de dichas aplicaciones consiste en determinar los máximos y mínimos en la resolución de problemas físico-químicos y de la naturaleza en general.

6.1. Crecimiento y decrecimiento de una función

Ya en el tema 6 se estudiaron los conceptos de funciones crecientes y decrecientes en un conjunto $S \subset \text{dom}(f)$ –véase página 24 de dicho tema–. Lo que haremos ahora es caracterizar dichos conceptos haciendo uso de la derivada. Para ello, considérese una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $[a, b] \subset \text{dom}(f)$, y derivable en el intervalo (a, b) , esto es, existe $f'(x)$ para todos los puntos $x \in (a, b)$.

Teorema 6.1 *Se verifica que*

- (1) $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ es estrictamente creciente en (a, b) ;
- (2) $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ es constante en (a, b) ;
- (3) $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ es estrictamente decreciente en (a, b) .

Cabe tener siempre presente que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Así, en el teorema anterior, (1) indica que la pendiente de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ son positivas, en (2) las pendientes son nulas, es decir, las rectas tangentes –que son horizontales– coinciden con la gráfica de la función y en (3) se tendrá que dichas pendientes son negativas. Estos comportamientos quedan ilustrados en la figura 4:

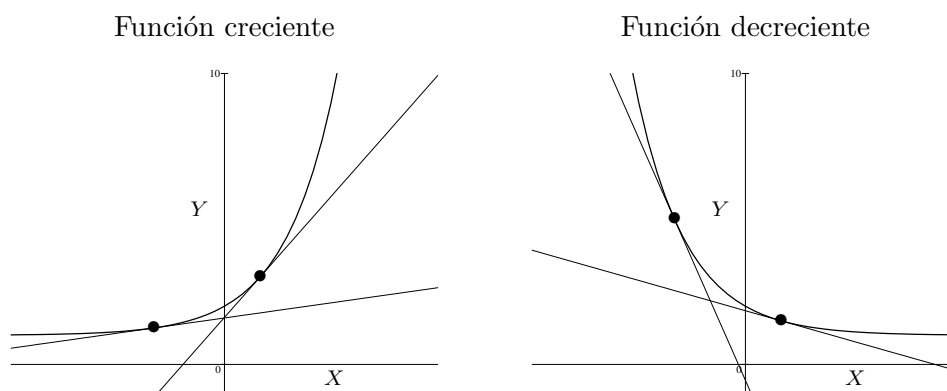


Figura 4

Ejemplo 6.1 Considérese la función $f(x) = x^2 + 6x$. Tenemos que

$$f'(x) = 2x + 6 = 2(x + 3) \implies \begin{cases} f'(x) > 0 & \iff x + 3 > 0 & \iff x > -3 \\ f'(x) < 0 & \iff x + 3 < 0 & \iff x < -3 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f \text{ es estrictamente creciente en } (-3, +\infty), \\ f \text{ es estrictamente decreciente en } (-\infty, -3). \end{cases}$$

Ejemplo 6.2 Estudiemos la monotonía de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Para ello, calculemos su derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Como el denominador de f' es positivo para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tendremos que

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \iff 1 - x^2 > 0 & \iff x^2 < 1 & \iff -1 < x < 1 \\ f'(x) < 0 & \iff 1 - x^2 < 0 & \iff x^2 > 1 & \iff x < -1 \text{ o bien } x > 1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f \text{ es estrictamente creciente en } (-1, 1), \\ f \text{ es estrictamente decreciente en } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

6.2. Puntos críticos de una función. Máximos y mínimos

Considérense una función $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, siendo $D = \text{dom}(f)$, un subconjunto $A \subset D$ y un punto $x_0 \in A$.

Definición 6.1 Se dice que x_0 es un **máximo absoluto** de f en A si

$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in A.$$

Se dice que x_0 es un **mínimo absoluto** de f en A si

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in A.$$

Ejemplo 6.3

1) La función $f(x) = x^2$ posee un mínimo absoluto en el punto $x_0 = 0$, pues $f(0) = 0 \leq f(x) = x^2$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

2) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no admite ni máximo ni mínimo absolutos en \mathbb{R} , pues

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

3) La función $\sin x$ definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ posee un máximo absoluto en el punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$, por ser $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \geq \sin x$, para todo $x \in [0, \pi]$.

Enunciamos ahora el siguiente

Teorema 6.2 (de Bolzano–Weierstrass) Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces posee un máximo y un mínimo absolutos en $[a, b]$.

Consideraremos en lo que sigue, salvo que se especifique lo contrario, un intervalo cerrado $[a, b] \subset D$ y $x_0 \in (a, b)$.

Definición 6.2 Diremos que f tiene un **máximo local o relativo** en $x_0 \in (a, b)$ si existe un entorno de x_0 de radio r en el que se verifica:

$$f(x_0) > f(x), \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Diremos que f tiene un **mínimo local o relativo** en $x_0 \in (a, b)$ si existe un entorno de x_0 de radio r en el que se verifica:

$$f(x_0) < f(x), \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Los máximos y mínimos locales reciben la denominación conjunta de **extremos locales o relativos** de f .

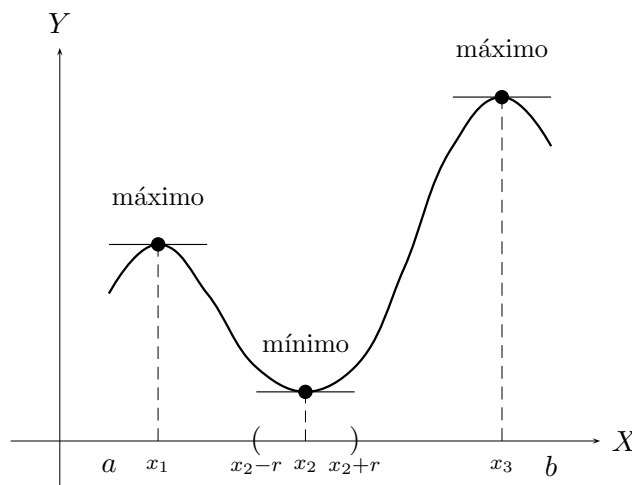


Figura 5: Máximos y mínimos locales.

6.2.1. Condición necesaria de extremo local

Observando la figura 5 podemos ver que las tangentes a la curva $y = f(x)$ en los extremos locales son rectas horizontales, esto es, tienen pendiente nula, de modo que $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$. De este modo, siguiendo con las hipótesis anteriores, se tiene que

$$\boxed{f \text{ es derivable en } x_0 \text{ y } x_0 \text{ es un extremo local de } f \implies f'(x_0) = 0}$$

Con esto se está diciendo que los extremos locales se encuentran entre los puntos que satisfacen $f'(x) = 0$, los cuales se denominan **puntos críticos**, **estacionarios** o **singulares** de f . No obstante, no todos los puntos críticos de f son extremos locales de f , de modo que necesitamos una condición suficiente para averiguar cuáles de los puntos críticos son máximos o mínimos locales.

6.2.2. Condiciones suficientes de extremo local

Como ya hemos dicho anteriormente, los puntos críticos de f son los posibles candidatos para ser los máximos y mínimos de f . Pues bien, vamos a proporcionar dos criterios para ver cuándo un punto crítico de la función f es un extremo local.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA.- Supongamos que x_0 es un punto crítico de f . Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha de x_0 entonces f tiene un máximo local en x_0 . Si, por el contrario, $f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) > 0$ a la derecha de x_0 entonces f tiene un mínimo local en x_0 .

Ejemplo 6.4 Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, que es continua y derivable en todo \mathbb{R} por ser una función polinómica, estudiemos su monotonía.

En primer lugar debemos hallar sus puntos críticos, que son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \iff \boxed{x = 0, x = 2}$$

En segundo lugar, hay que estudiar el signo a la izquierda y a la derecha de los puntos obtenidos

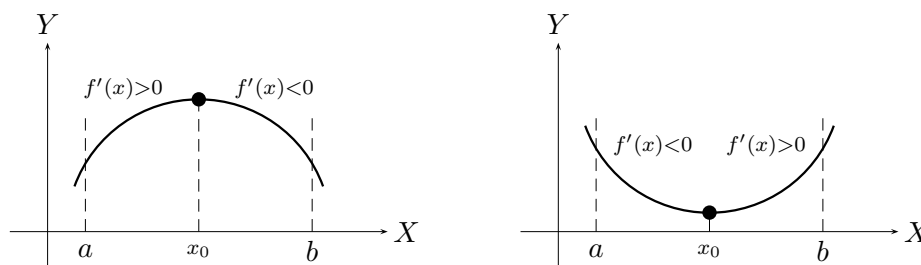


Figura 6: Criterio de la primera derivada.

anteriormente. Para ello, tomamos puntos arbitrarios del modo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} f'(-1) = 9 > 0 &\implies f'(x) > 0, \forall x < 0, \\ f'(1) = -3 < 0 &\implies f'(x) < 0, 0 < x < 2, \\ f'(3) = 9 > 0 &\implies f'(x) > 0, \forall x > 2, \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} x = 0 \text{ es un m\u00e1ximo local de } f \\ x = 2 \text{ es un m\u00ednimo local de } f \end{cases}$$

CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA. Sup\u00f3ngase que x_0 es un punto cr\u00edtico de f . Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un m\u00ednimo local en x_0 . Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un m\u00e1ximo local en x_0 .

Ejemplo 6.5 Consideremos la misma funci\u00f3n del ejemplo anterior. Entonces

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

Como $f''(0) = -6 < 0$ f alcanza en $x = 0$ un m\u00e1ximo local. Por otro lado, al ser $f''(2) = 6 > 0$, el punto $x = 2$ es un m\u00ednimo local de f .

6.3. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexi\u00f3n

Sea f una funci\u00f3n definida en un intervalo $[a, b] \subset D$ y sea $x_0 \in (a, b)$.

Definici\u00f3n 6.3 Se dice que f es **c\u00f3ncava** en el punto x_0 si la recta tangente a la gr\u00e1fica de f en x_0 queda por encima de la gr\u00e1fica en un entorno de x_0 .

Se dice que f es **convexa** en el punto x_0 si la recta tangente a la gr\u00e1fica de f en x_0 queda por debajo de la gr\u00e1fica en un entorno de x_0 .

Diremos que f es **c\u00f3ncava (convexa)** en el intervalo (a, b) si lo es en cada uno de sus puntos.

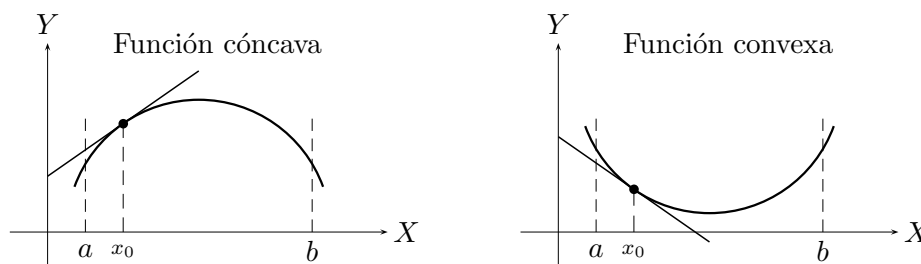


Figura 7: Concavidad y convexidad.

En las condiciones anteriores, supongamos que existe $f''(x)$ para cualquier $x \in (a, b)$. Se tienen los siguientes resultados:

Proposición 6.3

$$f \text{ es cóncava en } (a, b) \implies f''(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$$

$$f \text{ es convexa en } (a, b) \implies f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$$

Teorema 6.4

$$f''(x) < 0, \forall x \in (a, b) \implies f \text{ es cóncava en } (a, b)$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f \text{ es convexa en } (a, b)$$

Ejemplo 6.6

1) Los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x) = x^3 - 2$ se hallan del siguiente modo:

$$f''(x) = 6x \begin{cases} < 0, \forall x < 0 \implies f \text{ es cóncava en } (-\infty, 0), \\ > 0, \forall x > 0 \implies f \text{ es convexa en } (0, +\infty). \end{cases}$$

2) Estudiemos la concavidad y convexidad de la función $f(x) = x - x^6$.

Como $f''(x) = -30x^4 < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la función será cóncava en todo \mathbb{R} .

Una función f tiene un **punto de inflexión** en x_0 cuando en dicho punto f pasa de ser cóncava a ser convexa, o viceversa.

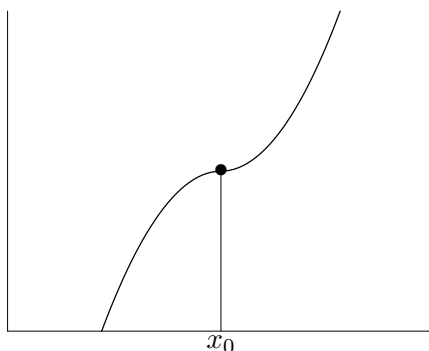


Figura 8: Punto de inflexión.

Proposición 6.5 La condición necesaria para que f tenga en x_0 un punto de inflexión es que exista $f''(x_0)$ y $f''(x_0) = 0$.

Nos encontramos con el problema de que la condición expuesta en la proposición anterior no es suficiente, es decir, el hecho de que exista $f''(x_0)$ y $f''(x_0) = 0$ no implica que x_0 sea punto de inflexión, aunque sí sabremos que x_0 es un posible punto de inflexión. Para saber con exactitud si lo es o no, estudiamos el signo de f'' a la izquierda y a la derecha de x_0 para conocer la concavidad y convexidad de f .

Ejemplo 6.7

1) En el ejemplo anterior para la función $f(x) = x^3 - 2$ tenemos que

$$f''(x) = 0 \iff 6x = 0 \iff x = 0.$$

Como la función f pasa de ser convexa a cóncava en dicho punto, tendremos que $x = 0$ es el punto de inflexión de f .

2) Considérese la función $f(x) = x^4$. Se verifica que

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Ahora bien, tanto a la izquierda como a la derecha del punto $x = 0$ tenemos que f'' es positiva, con lo cual f es convexa en todo \mathbb{R} , y entonces el punto $x = 0$ no es un punto de inflexión.

6.4. Problemas de máximos y mínimos

Los máximos y mínimos no sólo se aplican en la resolución de problemas puramente matemáticos, sino también en física, química y biología, economía y en la técnica. En estos problemas suelen darnos en el enunciado el cumplimiento de la condición de máximo o mínimo.

Veamos algunos ejemplos:

1) Hallar un número positivo cuya suma con su recíproco sea mínima.

Llamemos x al número que nos piden; su recíproco es $\frac{1}{x}$. El enunciado nos dice que $x + \frac{1}{x}$ debe ser mínima, con lo cual debemos hallar los mínimos de la función $S(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{1 + x^2}{x}$. Para ello, hallemos los puntos críticos de S :

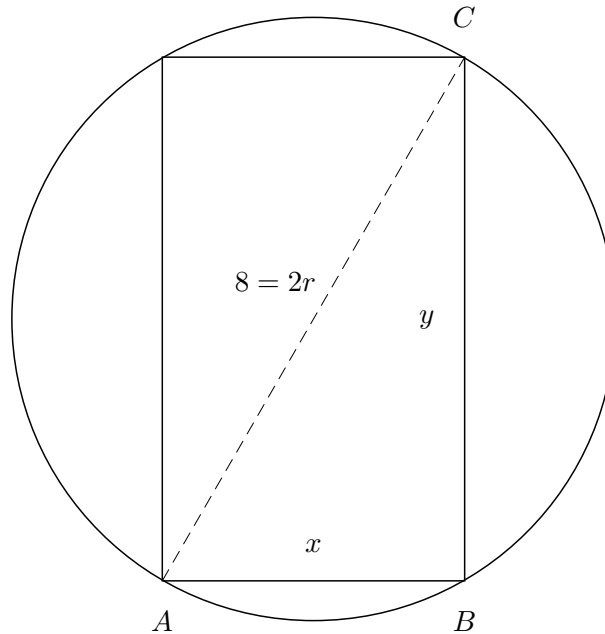
$$S'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Como nos están pidiendo un número positivo, desechamos el valor $x = -1$. Procediendo por el criterio de la derivada segunda se tiene que

$$S''(x) = \frac{2}{x^3} \implies S''(1) > 0 \implies x = 1 \text{ es un mínimo de } S,$$

con lo que el número pedido es, efectivamente, $x = 1$.

2) Dado un círculo de radio 4 dm, inscribir en él un rectángulo de área máxima.



Obsérvese la figura anterior. El área del rectángulo es $\mathbf{A} = xy$. Nos encontramos ante una función que depende de dos variables, x e y , y sólo sabemos calcular máximos y mínimos de funciones de una variable. No obstante, podemos encontrar una relación entre x e y , de modo que sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x)$. En efecto; considérese el triángulo de vértices A , B y C . En virtud del teorema de Pitágoras, y teniendo que cuenta que y indica una longitud, se tiene que

$$8^2 = x^2 + y^2 \implies y = \sqrt{64 - x^2},$$

de modo que

$$\mathbf{A}(x) = x\sqrt{64 - x^2}.$$

Una vez conseguida la función del área, debemos calcular sus máximos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(x) = \frac{128x - 4x^3}{2x\sqrt{64 - x^2}} = 0 &\iff 128x - 4x^3 = 4x(32 - x^2) = 0 \\ &\iff x = 0, x = \pm 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Los valores $x = 0$ y $x = -4\sqrt{2}$ carecen de sentido pues los lados de un triángulo son positivos, luego

$$x = 4\sqrt{2} \implies y = \sqrt{64 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}.$$

Es decir, se trata de un cuadrado de lado $4\sqrt{2}$ dm y de área 32 dm^2 .

(Compruebe el alumno que $\mathbf{A}''(4\sqrt{2}) < 0$ para verificar que se ha obtenido un máximo.)

7. Diferencial de una función en un punto

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $a \in D$. Entonces, por definición,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Si h es suficientemente pequeño o, lo que es lo mismo, cuando x es un punto muy próximo a a , podemos escribir que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \simeq f'(a) \iff$$

$$\boxed{f(x) - f(a) \simeq f'(a)(x - a)} \iff \boxed{f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)}.$$

Con esto estamos diciendo que, en un entorno del punto a , podemos calcular de forma aproximada el valor de $f(x)$. Del mismo modo, escribiremos

$$\boxed{f(a+h) - f(a) \simeq f'(a)h} \iff \boxed{f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h},$$

es decir, si h es suficientemente pequeño, podemos conocer de forma aproximada la variación que experimenta la función en un entorno del punto a . La expresión $f'(a)(x - a) = f'(a)h$ recibe el nombre de **diferencial** de la función f en el punto a .

Ejemplo 7.1 Para calcular la variación que experimenta la función $f(x) = x^2 - 3x$ al pasar del punto 2 al punto 2'5, tendremos que calcular $f(2'5) - f(2)$ de forma aproximada, es decir,

$$f(2'5) - f(2) \simeq f'(2)(2'5 - 2) = f'(2)0'5.$$

Como $f'(x) = 2x - 3$, entonces $f'(2) = 4 - 3 = 1$ y, en consecuencia, $f(2'5) - f(2) \simeq 0'5$.

Ejemplo 7.2 Calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{28}$ teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{27} = 3$.

Hagamos $f(x) = \sqrt[3]{x}$; entonces lo que debemos hacer es calcular el valor aproximado de $f(28)$. Así, usando el concepto de diferencial tendremos que

$$f(28) = \sqrt[3]{28} \simeq f(27) + f'(27)(28 - 27) = 3 + f'(27).$$

Teniendo en cuenta que $f'(x) = 1/3\sqrt[3]{x^2}$, $f'(27) = 1/27$, de manera que

$$f(28) = \sqrt[3]{28} \simeq 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27} \simeq 3'037.$$

8. Ejercicios propuestos

(1) Determina las ecuaciones de las tangentes a las curvas que se exponen a continuación en los puntos de abscisa 1, 0, -1:

a) $y = 3x^2 + 5$, $y = x^3 - 3x^2$, $y = \frac{3}{x^2 + 1}$;

b) $y = e^x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{sec} x$.

(2) ¿Cómo pueden hallarse los puntos de la gráfica de una función en los cuales la tangente es paralela al eje OX ? Aplícalo a la función $y = x^3 - 12x$.

(3) Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$, halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de 45° .

(4) Calcula las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{x}{5}$, $g(x) = \frac{5}{x}$, $h(x) = \frac{x^3 + 2}{3}$;

b) $f(x) = x^n$, $g(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$, $h(x) = \frac{6x^4}{11} - 5x^2 + \frac{2}{3}x + 4$;

c) $f(x) = x^2(7 - x)$, $g(x) = (5x^2 - 3)(x^2 + x + 4)$, $h(x) = x^2e^x$;

d) $f(x) = \frac{x - a}{x + a}$, $g(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 7x}{x}$, $h(x) = \frac{1}{3x^2}$.

(5) Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena:

a) $f(x) = (x - 2)^2$, $g(x) = (1 - x^2)^3$, $h(x) = \frac{x^5}{(1 - x)^5}$;

b) $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \sqrt{2 - x}$, $h(x) = \sqrt[3]{3x^2}$;

c) $f(x) = x\sqrt{3x^2 - 1}$, $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x - 1}}$, $h(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$;

d) $f(x) = \ln(3x^2 - 7)$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $h(x) = \ln(x - 2)^2$;

e) $f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$, $g(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$, $h(x) = \sqrt{\ln x}$;

f) $f(x) = \ln \sqrt[4]{x^3}$, $g(x) = e^{2x} \ln \frac{1}{x}$, $h(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$.

(6) Halla las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, $g(x) = \cos 5x$, $h(x) = \operatorname{sen}(7x - b)$;

b) $f(x) = \cos(7 - ax)$, $g(x) = 3 \operatorname{tg} 2x$, $h(x) = \operatorname{sen}^2 x$;

c) $f(x) = \cos^2(x^2 + 1)$, $g(x) = \operatorname{tg}^3 5x$, $h(x) = \operatorname{sen}^3 4x$;

d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$, $g(x) = \ln \operatorname{tg}(1 - x)$, $h(x) = \operatorname{sen} \sqrt{\ln(1 - 3x)}$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$, $g(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x$, $h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(2x + 1)}{\cos(1 - x)}$;

f) $f(x) = \sec(5x + 2)$, $g(x) = \operatorname{ctg} x \cos^2(2x + 1)$, $h(x) = \operatorname{cosec}^2(1 - x)$;

g) $f(x) = \frac{\cos 2x + \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x - \operatorname{sen} 2x}$, $g(x) = \operatorname{arcsen} 2x$, $h(x) = \operatorname{arc} \cos x^2$;

h) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - 1}{1 - x}$, $g(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x + 1}{x - 1}$.

(7) Aplicando la derivación logarítmica, calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = a^{5x^2}$, $y = \sqrt[x]{x}$, $y = \sqrt[x]{\operatorname{sen} x}$;

b) $y = x^{\cos x}$, $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$, $y = x^{\sec x}$;

c) $y = (x^2 + 4x - 1)^x$, $y = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{2x}$, $y = \sqrt[x^2]{\operatorname{arc} \cos x}$.

(8) Calcula las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta de las funciones:

- a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$;
- b) $f(x) = \frac{1}{x}$;
- c) $f(x) = \text{sen}(ax + b)$.
- (9) Un punto material se mueve de acuerdo con la siguiente ley: $e(t) = 2t - 5\sqrt{t}$. Halla su velocidad y aceleración en los instantes $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.
- (10) Dadas las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = 2x^3 - 6x^2 + 10$, determina los intervalos de crecimiento de las mismas.
- (11) Halla los máximos y mínimos de las funciones:
- a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $g(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x + 1$;
- b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$, $g(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$.
- (12) Dada la curva $y = x^4 - 6x^2 + 9$, determina los puntos de inflexión y los intervalos en que la curva es cóncava o convexa.
- (13) Hállense los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^4(1 - x)^3$.
- (14) Descompón el número 44 en dos sumandos, tales que el quintuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.
- (15) De todos los triángulos isósceles cuya base y altura suman 20 m, ¿qué base tiene el de área máxima?
- (16) Un recinto está formado por un rectángulo y un semicírculo que tiene por diámetro uno de los lados del rectángulo. El área del recinto es de 5 m². Calcula las dimensiones del recinto para que su perímetro sea mínimo.
- (17) A una ventana de 1 m² de área se le quiere construir un marco. Si el coste del marco es de 1 euro por cada metro de altura de ventana, y de 0'60 euros por cada metro de anchura, ¿cuáles son las dimensiones del marco más económico?
- (18) De todos los rectángulos cuyo perímetro es 60 cm, indica las dimensiones del de área máxima.
- (19) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de 10 cm de diámetro.
- (20) Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular, sabiendo que su volumen ha de ser de 9 m³, su altura de 1 m y el coste de su construcción por m² es de 30 euros para la base, 36 euros para la tapa y 24 euros para cada pared lateral.
- (21) Estimar el valor de la función $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$ en el punto $\pi/8$ teniendo en cuenta que $\text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
- (22) ¿Cuál es el valor aproximado de $\ln 2^5$?
- (23) Estimar de forma aproximada el incremento o decremento que experimenta la función $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$ al pasar del punto 1 al punto 1'2.