11.

Límites*

1. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{4n-3}{2n-3}$, encontrar un término, a partir del cual, su diferencia con 2 sea menor que $0,001$.

2. Usa la calculadora para intuir el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

3. Construye tablas con valores naturales que te permitan intuir el valor de
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-15}{\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

4. Representa la función $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x<2 \\ x^2-4, & x\geq 2 \end{cases}$ y a partir de la gráfica, da el valor de: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

5. Representa la función $f(x) = 2x+1$, marca sobre el eje OY el intervalo abierto $(3-0,5 \quad , \quad 3+0,5)$. ¿Qué intervalo abierto del eje OX, centrado en 1, es tal que los transformados de todos sus puntos, están en $(3-0,5 \ , \ 3+0,5)$?

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+4, & x\leq 1 \\ 3x, & x>1 \end{cases}$
halla $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

7. La Consejería de Salud ha realizado un estudio para averiguar los costes de vacunar a la población infantil contra la meningitis, y, aproximadamente, estos costes son
$$C(x) = \frac{125x}{100-x} \text{ millones de pesetas,}$$
para vacunar el x por ciento de la población. Esbozar la gráfica que relaciona la población vacunada con los costes. ¿Cuál es el dominio de definición? ¿Cuánto cuesta vacunar el 99 por ciento de la población? ¿Se podría vacunar al 100 por 100?

8. Halla las asíntotas verticales de la función
$$f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}.$$
Estudia, en esos puntos, los límites laterales.

*Estos ejercicios han sido extraídos del libro de bachillerato MATEMÁTICAS I de la EDITORIAL LA Ñ, cuyos autores son Francisco Benítez, Juan Luis Romero, Eloy Fernández, José Manuel Díaz, Alfredo Domínguez y Octavio Ariza. Se recomienda su lectura para la realización de estos ejercicios.

9. Estudia si las siguientes funciones poseen asíntotas horizontales, y qué posición tiene la gráfica respecto de ellas.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2}. & \text{b) } f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}. \\ \text{c) } f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}. & \text{d) } f(x) = \dfrac{x+3}{x}. \\ \text{e) } f(x) = \dfrac{|2x|}{x+2}. & \text{f) } f(x) = e^{-x}. \end{array}$$

10. ¿Alguna de las gráficas del ejercicio anterior corta a su asíntota horizontal?

11. El precio de un artículo de moda cae como consecuencia del paso del tiempo. Se calcula que dentro de t meses, el artículo costará

$$c(t) = 500 + \frac{2000}{t+1} \text{ ptas.}$$

¿Cuál es precio inicial? ¿ Y su precio después de un año? ¿A qué cantidad tiende el precio cuando ha pasado mucho tiempo? Esboza la gráfica de la función.

12. Sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = -2$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 4$. Halla:

a) $\lim_{x\to a} (f+g)(x)$. b) $\lim_{x\to a} (f-g)(x)$.

c) $\lim_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$. d) $\lim_{x\to a} (3f)(x)$.

13. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} (x^2-1)$. b) $\lim_{x\to -3} \dfrac{2}{3-x}$.

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+5}}{2x+1}$. d) $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{3x-1}$.

14. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$. b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^4-1}$.

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+8x}}{\sqrt[3]{x^2+x}}$.

15. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{(x-2)(x+3)}$. b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x}{x+1}$.

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x^2+3x}$. d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

16. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{8x^3+2x-1}{4x^3-x^2+3}$. b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2+3}$.

c) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+2x+1}-x)$. d) $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+3x-1}{x}-x\right)$.

e) $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3x+2}}{2\sqrt{x}}\right)$. f) $\lim_{n\to \infty} (\sqrt{n^2-3n}-n)$.

17. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{6-x}-3}{x+3}$. b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$.

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{x}$.

18. Calcula el valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, siendo $f(x)=x^3+1$

19. Calcula los límites:
    a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2-3n-7}{n^2}}$. b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{2x+1}\right)^{2x+1}$.
    c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{2n^2}$.

20. Estudia la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} 2, & x<0 \\ x+2, & 0\le x<3 \\ x^2-9, & x>3 \end{cases}$$

    Represéntala gráficamente.

21. ¿Qué valor ha de tomar a para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$?

$$f(x)=\begin{cases} ax-2, & x<1 \\ 4x-2a, & x\ge 1 \end{cases}$$

22. ¿En qué intervalo es continua la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$?

23. Halla los valores de los parámetros a y b, que aparecen en la función, para que sea continua en todo su dominio

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a, & -3\le x\le 1 \\ ax+b, & 1<x\le 3 \\ x+3, & 3<x\le 5 \end{cases}$$

24. Representa una función en el intervalo $[1,5]$ que tenga una discontinuidad de salto en el punto $x=3$, con un salto igual a 2.

25. Sabemos que $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, ¿será continua

$$g(x)=\frac{x^2-2x+1}{f(x)}?$$

26. Cuando n crece indefinidamente, averigua a qué número se aproximan las sucesiones:
    a) $a_n=\dfrac{2^n+3}{2^n-1}$. b) $b_n=\dfrac{2^n+3}{3^n-1}$.
    c) $c_n=\dfrac{3^n+3}{2^n-1}$. d) $d_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n-1}$.

27. Utiliza tu calculadora para buscar el valor de:
    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$.

28. Basándote en los resultados del ejercicio anterior, calcula los siguientes límites:
    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 5x}$. b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^3 x}$. c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$.

29. En un país de P habitantes, el ritmo al que la gente oye hablar sobre un rumor es proporcional al número de personas que no han oído hablar de él. El número de personas que han oído hablar sobre él, viene dado por

$$N(t) = P - \frac{A}{3t+2}$$

siendo A el número de personas que no saben el rumor al empezar, y t los días transcurridos desde entonces. Si $P = 40$ millones y $A = 38$ millones de personas ¿Qué tiempo tardará en enterarse la mitad de la población? Representa gráficamente la función. Cuando el tiempo pasa indefinidamente, ¿a qué número se acerca los que conocen el rumor?

30. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:
    a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\ln x}$. b) $f(x) = \dfrac{x}{1-e^x}$.
    c) $f(x) = |1-3^x|$. d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

31. Estudia en cada caso la continuidad de $f(x)$, $g(x)$ y de $(g \circ f)(x)$
    a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $g(x) = x^2$.
    b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
    c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

32. Un virus ha infectado a $N(t) = \dfrac{35}{5+30e^{-t}}$ miles de personas, en t días. ¿Cuántas personas tenían el virus cuando se detectó la enfermedad?. ¿Cuántos estaban contagiados 3 días después?. A lo largo del tiempo, ¿cuántas personas tienden a coger la enfermedad?. Haz un esbozo de la gráfica.

33. Comprueba geométricamente, que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, la función recorre todos los valores comprendidos entre el mínimo y el máximo. (Una función continua, transforma un intervalo cerrado en un intervalo cerrado).