Universidad de Cádiz

Acta de Mathematica Vulgata
Volumen 1, pp. 37–38, 2005
Universidad de Cádiz
Departamento de Matemáticas
http://www.uca.es/matematicas/RDM

Una sencilla ecuáción diferencial

Bartolomé López Jiménez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz
CASEM, Campus del Río San Pedro
11510 Puerto Real, Cádiz, España
bartolome.lopez@uca.es

Seguramente estaba yo en segundo de carrera cuando se contaba un chiste basado en un juego de palabras. Despojado de la gracia que le daría un cómico, el chascarrillo decía así:

Va un coche por la carretera y encuentra una señal: "REDUZCA A 40 km". El conductor reduce a esa velocidad y continúa. Cuando lleva recorrido cierto trayecto, una nueva señal apunta: "REDUZCA A 30 km". El conductor reduce y continúa; al cabo de un rato otra señal anuncia: "REDUZCA A 10 km". El conductor reduce y continúa, y cuando ha recorrido un trayecto encuentra un cartel que informa: "BIENVENIDO A REDUZCA".

Yo ya tenía suficiente formación como para plantearme un pequeño problema basado en este chiste. Supongamos que el coche va por la carretera a 100 kilómetros por hora y en un momento dado está a 100 kilómetros de su destino. A partir de ese momento el conductor va reduciendo la velocidad de modo que sea igual (en kilómetros por hora) a la distancia (en kilómetros) que le falta para llegar a su destino. La pregunta es: ¿cuánto tiempo tarda en llegar?

Aun conociendo la noción de derivada (o al menos conociendo la existencia de esta noción), yo tendía a resolver este tipo de problemas utilizando un concepto más primitivo: el de límite de una sucesión. Y de este modo usé la siguiente estrategia para resolver el problema.

Se representa en un segmento la distancia de los 100 kilómetros y se divide el segmento en n partes iguales; designo los puntos que dividen el segmento por a_1, a_2, $\dots$, a_{n+1}, donde a_1 representa el punto que está a 100 kilómetros del destino, a_2 el punto que está a $100(n-1)/n$ kilómetros, a_3 el punto que está a $100(n-2)/n$ kilómetros, y así sucesivamente hasta a_{n+1}, que es el punto de destino. La figura 1 ilustra los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Ahora se calcula el tiempo que tarda el coche en recorrer cada tramo, determinado por dos puntos consecutivos, a_i y a_{i+1}, si lo recorre a una velocidad igual (en kilómetros por hora) a la distancia (en kilómetros) entre el punto a_i y el destino (representado por el punto a_{n+1}); después se suman los tiempos recorridos en los n tramos.

Por ejemplo, si divido la distancia en 2 partes iguales, tengo 3 puntos, a_1, a 100 kilómetros del destino, a_2, a 50 kilómetros del destino, y a_3, que es el destino (Figura 1). El coche recorre el primer tramo a 100

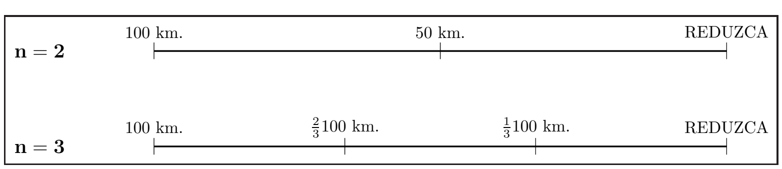

Figura 1: Los casos $n = 2$ y $n = 3$

kilómetros por hora, y el segundo a 50 por hora; el tiempo pues que tarda es $50/100 = 1/2$ de hora para el primer tramo y $50/50 = 1$ hora para el segundo tramo; en total $(1/2) + 1$ horas.

Si divido la distancia en 3 partes iguales, tengo 4 puntos, a_1, a 100 kilómetros del destino, a_2, a $(2/3) \cdot 100$ kilómetros del destino, a_3, a $(1/3) \cdot 100$ kilómetros del destino, y a_4, que es el destino (Figura 1). El coche recorre el primer tramo a 100 kilómetros por hora, el segundo a $(2/3) \cdot 100$ kilómetros por hora y el tercero a $(1/3) \cdot 100$ kilómetros por hora. El tiempo que tarda es

$$\frac{(1/3) \cdot 100}{100} = 1/3$$

de hora para recorrer el primer tramo,

$$\frac{(1/3) \cdot 100}{(2/3) \cdot 100} = 1/2$$

de hora para el segundo tramo, y

$$\frac{(1/3) \cdot 100}{(1/3) \cdot 100} = 1$$

hora para el tercer tramo. El tiempo total es pues $(1/3) + (1/2) + 1$ horas.

Si divido la distancia en n partes iguales, como en los dos casos anteriores, puedo calcular el tiempo que tarda el coche en recorrer los 100 kilómetros; compruebo que este tiempo es

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$$

horas. En resumen, si calculo el límite de esta expresión cuando n tiende a infinito, tendré la respuesta al problema planteado. Pero...

Poco después de todas estas reflexiones empezaron a explicarme en la carrera las ecuaciones diferenciales. No fue inmediatamente cuando me di cuenta de que podía aplicar esta noción nueva para mi al problema anterior, pero no tardé mucho tiempo. No tenía muy presente la Física del bachillerato, pero recordaba al menos que la velocidad era la derivada del espacio con respecto al tiempo. El problema se reducía entonces a resolver la sencilla ecuación diferencial

$$x'(t) = 100 - x(t),$$

donde t es el tiempo y $x(t)$ el espacio recorrido por el coche en el instante t. Dado que suponemos que $x(0) = 0$, la solución de esta ecuación diferencial es

$$x(t) = 100(1 - e^{-t}).$$

Como se puede ver, una de las ventajas del cálculo diferencial es que da respuesta completa al problema, es decir, permite calcular el espacio que ha recorrido el coche en el instante t. Se observa además lo siguiente en la expresión de $x(t)$: para $t = 0$, $e^{-t} = 1$, y cuando t crece, e^{-t} decrece y se aproxima a 0. Por tanto el espacio que recorre el coche, a medida que el tiempo pasa, se aproxima a 100 kilómetros, es decir, el coche está cada vez más cerca del destino; sin embargo no llega nunca, porque $e^{-t} > 0$, aunque t sea muy grande.

La frustración que quizá produzca el hecho de estar tan cerca del destino y no llegar nunca puede ser superada si se resuelve el siguiente problema. Supongamos que una persona va caminando por un sendero a una velocidad de 3 kilómetros por hora y en un momento dado está a 9 kilómetros de su destino; a partir de ese momento el caminante va reduciendo su marcha de modo que su velocidad sea igual (en kilómetros por hora) a la raíz cuadrada de la distancia (en kilómetros) que le falta para llegar a su destino. La pregunta es: cuánto tiempo tarda en llegar.