

Construcciones con regla y compás

ANTONIO JESÚS PAN COLLANTES

Licenciatura en Matemáticas

Universidad de Cádiz

antonio.pancollantes@alum.uca.es

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo tratamos de poner de relieve algunos aspectos interesantes acerca de las construcciones con regla y compás a lo largo de la historia. La belleza, manifestada por medio de grandes genialidades, es el principal motivo de la importancia de este tema en la historia de las matemáticas, pues aunque es perfectamente posible construir casi cualquier objeto geométrico ayudándose de otras herramientas, el uso de utensilios distintos de una simple regla sin graduar y un compás siempre ha estado *mal visto*.

Muchos esfuerzos se han hecho para conseguir determinar qué se puede construir con las susodichas herramientas y qué no. Está claro que son herramientas muy potentes que nos permiten construir una infinidad de objetos pero, ¿dónde está su límite? ¿es posible construir cualquier cosa que nos planteemos? Está claro que no, pues cualquier figura que no conste de arcos de circunferencia y segmentos rectilíneos queda fuera de su alcance (aunque se pueda acceder a una cantidad finita de puntos de dicha figura, como es el caso de la elipse).

Más adelante veremos que la humanidad ha conseguido resolver el problema de caracterizar aquéllas construcciones susceptibles de ser construidas con regla y compás, lo cual, aunque sea completamente inútil, es un alivio. En concreto podremos comprender por qué los tres problemas clásicos de la Antigüedad, a saber, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo, no son resolubles utilizando únicamente nuestras herramientas. La historia sobre la resolución de los tres problemas geométricos clásicos está llena de anécdotas, y como consecuencia de ellos surgieron, por ejemplo, las secciones cónicas, cálculo aproximado del número p , el método de exhaustión como predecesor del cálculo de límites o la introducción de curvas trascendentes.

El texto está dividido en tres partes: en la primera se hace un repaso a la historia de estas construcciones; en la segunda se hace una breve introducción a la teoría algebraica de cuerpos y extensiones; y una tercera parte que utiliza el contenido de la segunda para demostrar la imposibilidad de los tres problemas clásicos griegos. Además, este texto está dirigido a cualquier público con conocimiento de la geometría de bachillerato, si bien es cierto que la segunda parte puede hacerse un poco dura. Al ser un artículo con carácter divulgativo no debe buscarse el rigor de un típico escrito de matemáticas.

2. HISTORIA

Desde sus orígenes, el hombre ha tratado de comunicarse mediante grafismos o dibujos. Las primeras representaciones que conocemos son las pinturas rupestres. En ellas no solo se intentaba representar la realidad que le rodeaba, animales, astros, al propio ser humano, etc., sino también sensaciones, como la alegría de las danzas, o la tensión de las cacerías.

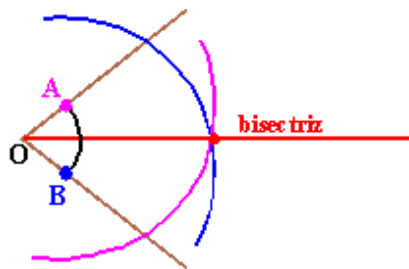
Cuando el hombre adquirió un determinado desarrollo de sus ideas matemáticas necesitó también reflejarlas gráficamente. Tras la observación diaria de diversos cuadrados imperfectos en la naturaleza,

el hombre induce la existencia del *cuadrado ideal* (en el sentido platónico), y se lanza a su representación. Y entonces necesita instrumentos: en un principio sólo punzones y tablillas enceradas (ver <http://www.geocities.com/fudbiro/Antecedentes.html> para una historia de los instrumentos de escritura); pero después herramientas que le permitan firmeza en los trazos para imitar la idealidad de los objetos a dibujar. Y así aparecen la regla y el compás.

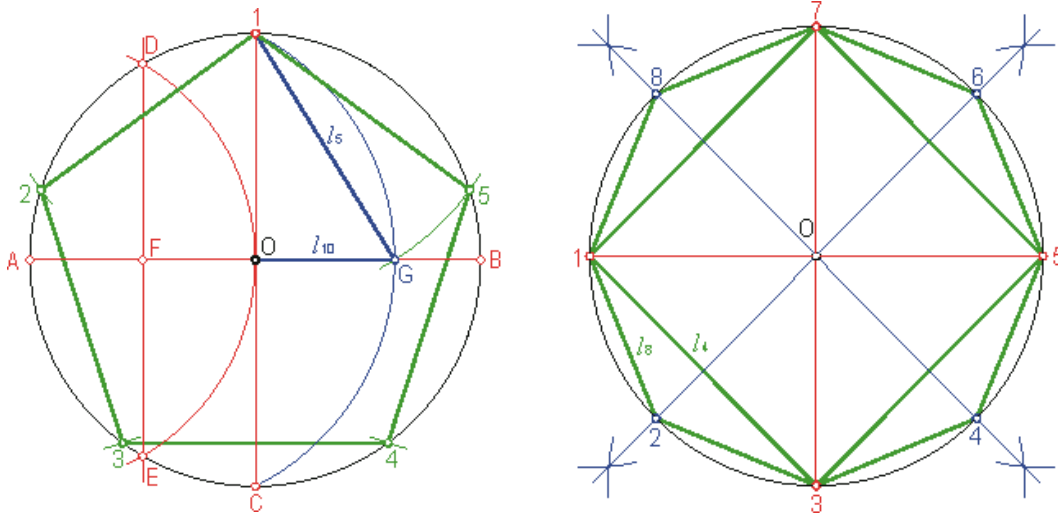
El primer gran avance de la geometría se produjo en Grecia. Tal fue el avance que los Elementos de Euclides fueron el primer modelo de sistema axiomático. Pero la importancia de la geometría griega no es sólo en el aspecto teórico, sino también en el práctico: se preocuparon de construir sistemáticamente cada figura que imaginaban.

Para tal fin crearon una gran cantidad de herramientas, entre ellos regla, compás y utensilios especiales para trisecar ángulos. Pero curiosamente nuestras dos herramientas tuvieron una especial preponderancia, pues una construcción se consideraba mucho más elegante si sólo necesitaba de ellas para su realización.

Por ejemplo, podemos considerar construcciones como la bisectriz de un ángulo,

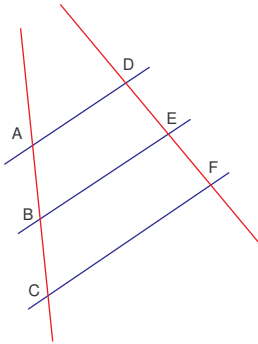


la construcción de polígonos regulares,



o también el famoso teorema de Thales, que permite la multiplicación y división de dos segmentos dados cualesquiera, pues se cumple que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



Esta “afición” de los griegos por este tipo de construcciones fue transmitida al Mundo Árabe, a la Edad Media y al Renacimiento como un juego o reto, más que por su utilidad. Se fueron aportando más y más construcciones, pero no se avanzó mucho acerca de las limitaciones que estas herramientas podían presentar. Se encontraron diversas situaciones en las que la regla y el compás parecían no ser suficientes, pero no se podía saber nada riguroso acerca de ellas.

Estas limitaciones, aunque evidentes, no sólo no mermaron el interés de los matemáticos por este juego, sino que incluso apareció una cierta corriente de ellos que intentó poner aún más restricciones a la hora de construir.

Por ejemplo, cabe destacar al persa del siglo X, Abul Wefa, que se preocupó por los objetos que podían ser contruidos sólo con regla y compás rígido. Se entiende por compás rígido o compás oxidado un instrumento que permite trazar circunferencias de un único radio prefijado. El propio Leonardo da Vinci y otros grandes pensadores del Renacimiento se preocuparon por este tipo de construcciones, pero no fue hasta 1673 cuando apareció en Ámsterdam un libro anónimo (a posteriori se supo que el autor fue George Mohr) llamado *Compendius Euclidis Curiosus* que daba un tratamiento serio al problema. Posteriormente, un agrimensor londinense, William Leybourn, escribió un libro acerca de "juegos y pasatiempos con regla y tenedor" (un tenedor puede hacer las veces de compás rígido).

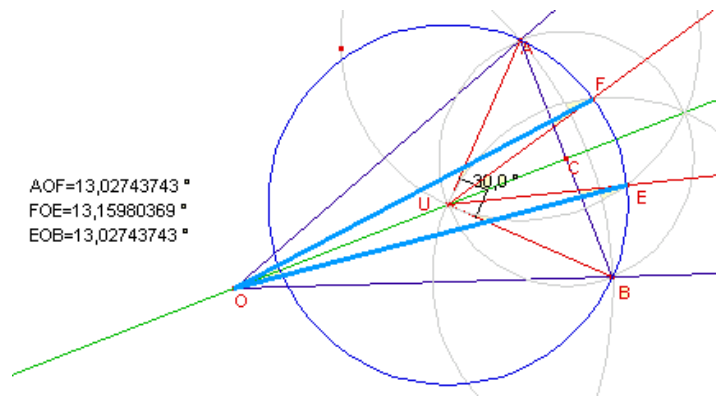
En el siglo XIX el francés Poncelet demostró que toda construcción con regla y compás puede ser llevada a cabo únicamente con una regla y un compás rígido (¡o sea, un tenedor!). Por otra parte, el suizo Jacob Steiner probó que bastaba únicamente con una regla y una circunferencia fija en el papel. Finalmente, en el siglo XX se probó que sólo hacía falta la regla, el centro de la circunferencia y un arco de tamaño arbitrario de la misma.

Por otra parte, el italiano Lorenzo Mascherani probó en 1794 que toda construcción con regla y compás podía ser realizada únicamente con el compás, aunque esto ya lo había demostrado el desconocido George Mohr un siglo antes. Se cuenta que Napoleón le propuso a Mascherani la posibilidad de realizar cualquier construcción de regla y compás a partir de una colección infinita de palillos de dientes planos y del mismo tamaño. La demostración de este hecho se produjo en 1939 por Dawson.

Pero volviendo a la regla y al compás, vamos a hablar de tres construcciones que se plantearon en la Antigua Grecia y que no se pudieron resolver. Se trata de la trisección de un ángulo arbitrario, la duplicación de un cubo y la cuadratura del círculo.

2.1. Trisección de un ángulo arbitrario

Dada la facilidad para realizar la bisectriz de un ángulo y la trisección de un segmento, parece natural que en el 500 a.C. algunos griegos se planteasen cómo dividir un triángulo en tres partes iguales. Encontraron solución a casos concretos (por ejemplo para trisecar el ángulo de 90 grados basta con construir un triángulo equilátero y hacerle la bisectriz). A lo largo de la historia han aparecido falsas demostraciones e incluso soluciones aproximadas:

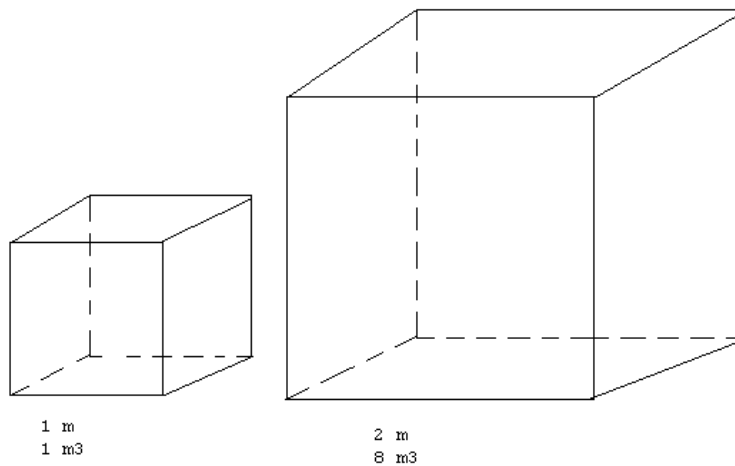


Es curioso que incluso en nuestros días aparezcan demostraciones como la del padre Callaham, de EEUU, en 1921, pues en 1837 el francés Wantzel demostró la imposibilidad de trisecar un ángulo arbitrario. Este personaje ha llegado incluso a reclamar que existe una conspiración en su contra por parte de los matemáticos profesionales. Lógicamente la comunidad matemática ya no presta atención a esta "secta de trisecadores", que se empeña en proporcionar demostraciones tan enrevesadas que incluso resulta difícil encontrar dónde está el error.

2.2. Duplicación del cubo

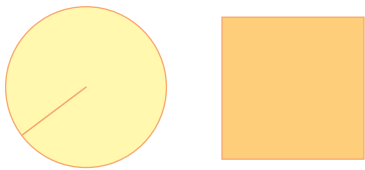
La historia de este problema es muy curiosa. Se cuenta que en el año 429 a.C. murió Pericles, tirano de Atenas, y la ciudad cayó en una profunda crisis. Los atenienses, abrumados, se dirigieron al Oráculo de Delos para pedirle una solución. Y la respuesta del Oráculo fue que la crisis desaparecería si construían para los dioses un altar con el doble de volumen que el ya existente.

Como la forma del altar era cúbica los atenienses crearon un altar con el doble de arista que el anterior; pero la gran crisis sólo no se solucionó sino que empeoró. Desesperados, los ateniense se dirigieron al Oráculo de nuevo, a lo que éste reprochó que el nuevo altar no tenía el doble de volumen, sino que era ocho veces más grande:



Los atenienses lo intentaron por todos los medios, pero lo que es seguro es que no lo consiguieron sirviéndose sólo de regla y compás. Grandes pensadores acometieron este problema: Arquitas de Tarento, Hipócrates de Quío, Menecmo, Eratóstenes de Cirene... Pero nuevamente Wantzel probó su imposibilidad en 1837.

2.3. Cuadratura del círculo



Este problema fue propuesto por Anaxágoras en el 500 a.C., y se trata de construir un cuadrado de igual área que un círculo dado. Ello nace de la necesidad de medir superficies comparándolas con unidades de medida cuadradas, lo que obligaba a convertir la superficie encuadrada en una circunferencia (círculo), en un cuadrado de área equivalente y por lo tanto más fácil de medir.

dibujó

Se encontraron numerosas soluciones aproximadas con regla y compás, y soluciones exactas utilizando otras herramientas. Ha sido uno de los problemas que más importancia ha tenido en la historia y su estudio ha propiciado numerosos adelantos en la matemática. De hecho, su influencia ha sido tal que la expresión hecha "la cuadratura del círculo" se utiliza comúnmente para señalar algo de extrema dificultad o imposible.

Estos tres problemas tienen en común un enunciado sencillo, que parece estar sacado de cualquier libro de bachillerato. Sin embargo han tenido a la humanidad pendiente durante... ¡¡2200 años!! Esto es lo que caracteriza a los problemas geniales, como por ejemplo la conjetura de Fermat: el enunciado puede ser comprendido por un individuo ajeno a las matemáticas, pero su demostración está al alcance de sólo unos pocos, y exigió el desarrollo de ramas enteras de las matemáticas.

Lo cierto es que estos problemas son imposibles de resolver únicamente con regla y compás. Si por ejemplo enunciásemos: "dados tres segmentos iguales construir un cuadrado con ellos", no tendríamos dificultad en comprender que su resolución es imposible. Pues bien, la misma dificultad es la que acompaña a los tres problemas clásicos, con la diferencia de que su imposibilidad no es tan evidente, está un "poco" más profundo y requiere más esfuerzo.

Es relativamente fácil probar que un determinado objeto es construible: bastará con dar su construcción. Ahora bien, ¿cómo probar que algo no puede ser construido?, ¿puedo realizar infinitas construcciones comprobando que ninguna de ellas es la pedida? Como matemáticos no nos conformamos con mostrar, debemos de-mostrar (mostrar desde dentro).

Para ello podemos utilizar cualquier herramienta lógica que se nos ocurra, por ejemplo el álgebra. Es curioso cómo el álgebra, que nace a partir de la geometría, puede llegar más de 2000 años después para ayudar a la geometría. Recordemos que el álgebra nació como un intento de abstracción de operaciones tan geométricas como la unión de segmento, el cálculo de áreas o la determinación de volúmenes. Es decir, en principio, el álgebra tenía sus pies en la geometría, porque todos sus teoremas se basaban en una demostración geométrica. La curiosidad aparece cuando la geometría requiere del álgebra para demostrar sus proposiciones. Estos nuevos desarrollos algebraicos junto con la teoría de Galois fueron el comienzo del álgebra moderna.

A continuación vamos a desarrollar unos pocos conceptos que nos permitan conocer, al menos, la idea de la demostración de la imposibilidad de estos tres problemas.

3. TEORÍA DE CUERPOS Y EXTENSIONES DE CUERPOS

Vamos a ver algunos conceptos básicos de la teoría de cuerpos.

Definición 1. *Un cuerpo es un anillo conmutativo $(F, +, \cdot)$ tal que 0 es distinto de 1 y todos los elementos de F salvo 0 tienen inverso multiplicativo.*

Esto es, un cuerpo es un conjunto con las mismas propiedades que los reales (\mathbb{R}), los racionales (\mathbb{Q}) o los complejos (\mathbb{C}).

Definición 2. *Dados dos cuerpos K y K' , se dice que K' es una extensión de K si $K \subset K'$.*

Nos centraremos únicamente en las extensiones de la forma $K' = K(x)$, esto es, el menor cuerpo que contenga a K y a x , siendo x un elemento que no pertenezca a K (si perteneciese, entonces $K(x) = K$).

Definición 3. *Se define el grado de una extensión $K \subset K'$ y se simboliza por $[K' : K]$ como la dimensión de K' considerado como espacio vectorial sobre K .*

Es fácil probar que si la extensión es de la forma $K \subset K(x)$ el grado coincide con el grado del polinomio irreducible con coeficientes en K que verifica x .

Para una demostración de este hecho, así como de una definición rigurosa de polinomio irreducible ver <http://www.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Triseccion/node4.html>.

Por ejemplo: consideremos el cuerpo \mathbb{Q} , y el elemento $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Entonces tenemos la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, que será de grado 2, pues cualquier elemento de este nuevo cuerpo será de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ (una base estaría formada por 1 y $\sqrt{2}$). Además, observemos que verifica el polinomio irreducible en \mathbb{Q} , $x^2 - 2 = 0$. Luego la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es de grado 2.

Asimismo, sabemos que i verifica el polinomio irreducible en \mathbb{R} , $x^2 + 1 = 0$, luego la extensión $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ es de grado dos también.

Existen extensiones de cualquier grado. Sin ir más lejos, en 1882 Linderman probó que π es transcendente; esto es, no verifica ningún polinomio con coeficientes racionales. Luego la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi)$ es de grado infinito (extensión transcendente).

Teorema 4. *Sean K, F y H tres cuerpos con $K \subset F \subset H$. Se verifica que $[H : K] = [H : F] \cdot [F : K]$.*

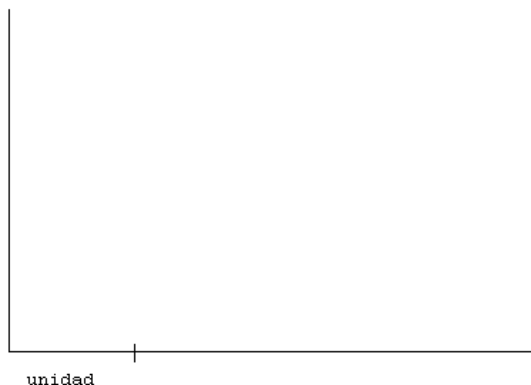
Con esto ya estamos en condiciones de probar la imposibilidad de los tres problemas clásicos.

4. IMPOSIBILIDAD DE LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS GRIEGOS

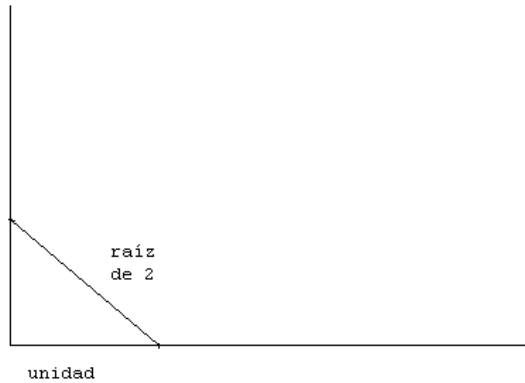
En primer lugar debemos acordar qué significa una construcción con regla y compás: a partir de un conjunto de puntos en el plano obtener otros de manera que sólo podemos realizar dos operaciones:

- Por dos puntos trazar una recta.
- Dibujar una circunferencia dado su centro y su radio.

Partiremos de un segmento inicial, cuya medida tomaremos como unidad. Mediante una construcción tradicional, podremos crear una recta perpendicular a uno de los extremos de este segmento. Y obtendremos así una especie de sistema de referencia:

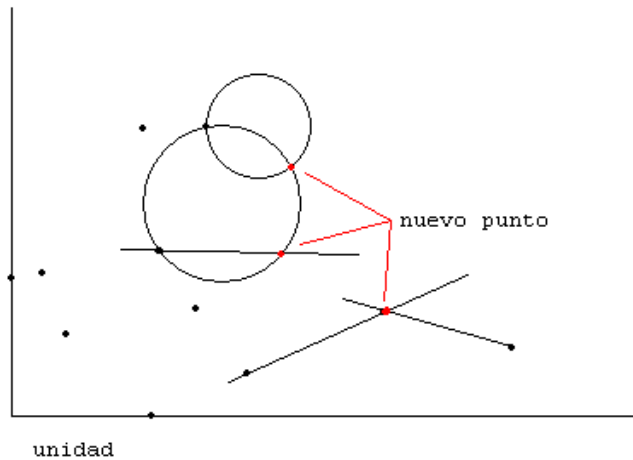


Se puede fácilmente obtener la suma, la resta, la multiplicación y la división de dos segmentos, luego a partir de esta situación podemos construir cualquier punto de coordenadas racionales. Esto es, podemos construir todo \mathbb{Q} . Pero también podemos construir otras magnitudes, como por ejemplo $\sqrt{2}$:



Así que podemos construir todo el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Esto quiere decir que hemos obtenido una extensión de grado 2. Pero ¿cuál es el grado, en general, de la extensión de \mathbb{Q} que podemos conseguir con regla y compás?

Supongamos que tenemos un número determinado de puntos construidos, tenemos un cuerpo asociado, K_n , resultado de sumar, restar, multiplicar y dividir todos los segmentos posibles:



Podemos obtener un nuevo punto de tres formas distintas:

1. Intersección de dos rectas. En cuyo caso las coordenadas del nuevo punto verificarán un polinomio de grado uno, luego no hay ninguna extensión del cuerpo K_n .
2. Intersección de recta con circunferencia. En este caso las coordenadas verificarán un polinomio de grado dos. Si es irreducible la extensión será de grado dos, si no, de grado uno.
3. Intersección de dos circunferencias. Nuevamente las coordenadas verifican un polinomio irreducible de grado dos o grado uno, luego la extensión será de grado dos o grado uno.

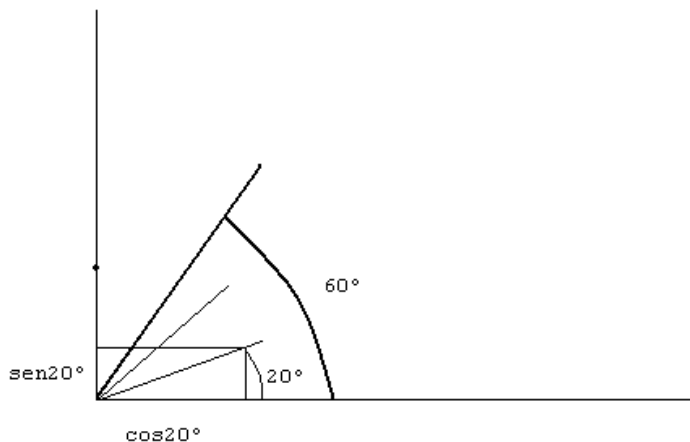
Estos tres hechos son fáciles de comprobar sin más que obtener los desarrollos algebraicos pertinentes. Así pues, lo que hemos obtenido es que cada vez que construimos un punto o bien el nuevo cuerpo es el mismo, o bien es una extensión de grado dos del cuerpo previo.

Supongamos que construimos un punto arbitrario, P_{n+1} , ayudándonos de n puntos auxiliares P_1, \dots, P_n . El cuerpo que podemos construir asociado a estos $n + 1$ puntos será una extensión de \mathbb{Q} de grado $[K_{n+1} : \mathbb{Q}] = [K_{n+1} : K_n][K_n : K_{n-1}] \dots [K_1 : \mathbb{Q}]$, donde K_i es el cuerpo asociado al conjunto de puntos $\{P_1, \dots, P_i\}$. Así pues, con lo visto anteriormente, será: $[K_{n+1} : \mathbb{Q}] = 2^t$, con $t \leq n + 1$.

Ahora vamos a demostrar, por fin, uno a uno la imposibilidad de los tres Problemas Clásicos:

4.1. Trisección de un ángulo arbitrario

Vamos a ver que no se puede trisecar el ángulo de 60° . Si fuese posible entonces obtendríamos el ángulo de 20° :



Es decir, podríamos realizar la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$. Pero teniendo en cuenta la fórmula trigonométrica $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ aplicada a $A = 20^\circ$ tenemos que $\cos 20^\circ$ verifica la ecuación $4x^3 - 3x - 1/2 = 0$, que es un polinomio con coeficientes en \mathbb{Q} irreducible. Luego la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$ es de grado 3, lo cual contradice todos los razonamientos anteriores pues 3 no es potencia de 2.

4.2. Duplicación de un cubo

Vamos a ver que no se puede duplicar el volumen de un cubo de lado 1. Supongamos un cubo de lado 1, y por tanto volumen 1. Si se pudiese duplicar su volumen obtendríamos un segmento s tal que $s^3 = 2$, esto es, s verificaría el polinomio irreducible $x^3 - 2 = 0$, que es irreducible. Por lo tanto la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(s)$ es de grado 3, y he aquí nuevamente la contradicción.

4.3. Cuadratura del círculo

Construyamos un círculo de radio unidad. Su área es π . Si fuésemos capaces de construir un cuadrado de igual área, su lado sería un segmento de longitud s tal que $s^2 = \pi$. Luego habríamos construido el número $\sqrt{\pi}$, y por tanto también podríamos construir π (Teorema de Thales). Luego la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi)$ sería de grado 2^t , para cierto $t \in \mathbb{N}$; y no como probó Linderman, de grado infinito.