Tema 2

Conjuntos Numéricos

Índice del Tema

1 Propiedades algebraicas de los números reales.

Antes de comenzar a enunciar los primeros axiomas hemos de aclarar algunas cuestiones. Ya que el conjunto de los números reales puede construirse a partir de la axiomática de la teoría de conjuntos, las proposiciones que ahora enunciamos pueden deducirse a partir de esa axiomática. No te extrañes, por tanto, que le llamemos propiedades al referirnos a esas proposiciones que para nosotros serán axiomas. Por otra parte, supondremos conocido, al menos intuitivamente, el concepto de operación en un conjunto. En esta primera sección enunciaremos las propiedades algebraicas y más adelante enunciaremos las de orden y la de completitud. Vamos a ello.

AXIOMAS DE CUERPO CONMUTATIVO

Existe un conjunto, denotado por $\mathbb{R}$ y a cuyos elementos llamamos *números reales*, en el que están definidas dos operaciones: una llamada *suma* y denotada por "$+$" y otra llamada *producto* o *multiplicación* y denotada por "$\cdot$", tales que si a,$b \in \mathbb{R}$, entonces la suma $a + b \in \mathbb{R}$ y el producto $ab = a \cdot b \in \mathbb{R}$ y verificando las siguientes propiedades:

Asociativas: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$, si $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Conmutativas: $a + b = b + a$ y $ab = ba$, si $a, b \in \mathbb{R}$.

Elemento unidad: Existe un elemento, denotado por 1 y llamado *uno*, tal que $1 \cdot a = a$, si $a \in \mathbb{R}$.

Elemento nulo: Existe un elemento, denotado por 0 y llamado *cero*, que es distinto de 1 y verifica $0 + a = a$, si $a \in \mathbb{R}$.

Opuesto: Para cada número $a \in \mathbb{R}$ existe otro número, denotado por $-a$ y llamado el *opuesto* de a, tal que $a + (-a) = 0$.

Inverso: Para cada número $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe otro número, denotado por a^{-1} y llamado el *inverso* de a, tal que $a\,a^{-1} = 1$.

Distributiva: $a(b + c) = ab + ac$, si $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se le llama cuerpo conmutativo por verificar las anteriores propiedades. A continuación recogemos otras propiedades que pueden deducirse de los axiomas:

Proposición 1.1

(a) El número uno es el único que tiene la propiedad $1 \cdot a = a, \quad a \in \mathbb{R}$.

(b) El número cero es el único que tiene la propiedad $0 + a = a, \quad a \in \mathbb{R}$.

(c) Cada número real $a \in \mathbb{R}$ *sólo tiene un opuesto.*

(d) Cada número real $a \in \mathbb{R}$ *sólo tiene un inverso.*

Demostración

(a) Supongamos que otro número u verifica $u \cdot a = a, \quad a \in \mathbb{R}$; en particular para $a = 1$, debe ser $u \cdot 1 = 1$. Por otro lado es $1 \cdot u = u$. Por la propiedad conmutativa es $u \cdot 1 = 1 \cdot u$, así que de ambas igualdades es $u = 1$.

Ejercicio II.1. Observando la demostración anterior prueba (b).

(c) Sea $a \in \mathbb{R}$ y supongamos que existen dos números reales a' y a'' que verifican: $a+a' = 0$ y $a+a'' = 0$. Tenemos entonces (¿cuál es la propiedad que se aplica en cada paso?):

$$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$$

Ejercicio II.2. Observando la demostración anterior prueba (d).

■

PROPOSICIÓN 1.2

(i) Si $a \in \mathbb{R}$, $a + a = a$ *si y sólo si* $a = 0$.

(ii) $a \cdot 0 = 0, \ \ a \in \mathbb{R}$.

(iii) $-(-a) = a, \ \ a \in \mathbb{R}$.

(iv) Si $a \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$, $\ \ \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(v) $a(-b) = (-a)b = -(ab), \ \ a, b \in \mathbb{R}$.

(vi) Si $a \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$, $\ \ (-a)^{-1} = -a^{-1}$.

(vii) Si $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces* $ab = 0$ *si y sólo si* $a = 0$ *ó* $b = 0$.

(viii) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$ *entonces* $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN

(i) Vemos primero la implicación "$a + a = a \Rightarrow a = 0$". Tomemos $a \in \mathbb{R}$ verificando $a + a = a$, sumando a esta igualdad $-a$ resulta que $(a + a) + (-a) = a + (-a)$. Aplicando al primer miembro, sucesivamente, las propiedades asociativa, del opuesto y del elemento nulo, resulta:

$$(a + a) + (-a) = a + [a + (-a)] = a + 0 = a.$$

Por otro lado, el segundo miembro es $a + (-a) = 0$. De ambas, $a = 0$.

Vemos ahora la implicación "$a = 0 \Rightarrow a+a = a$". Esta implicación es trivial, ya que por la propiedad del elemento nulo es $0 + 0 = 0$.

(ii) Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces (¿qué propiedad se aplica en cada paso?)

$$(a \cdot 0) + a = (a \cdot 0) + (a \cdot 1) = a(0 + 1) = a \cdot 1 = a.$$

Puesto que cero es el único que tiene la propiedad $0 + a = a$ (ver proposición 1.1), resulta que $a \cdot 0 = 0$.

(iii) Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces $(-a) + a = a + (-a) = 0$, luego a es el opuesto de $-a$; esto es, $a = -(-a)$

Ejercicio II.3. Usa la misma idea para probar que $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(v) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0.$$

Por tanto $a(-b)$ es el opuesto de ab; esto es, $a(-b) = -(ab)$.

Ejercicio II.4. Prueba que $(-a)b = -(ab)$.

(vi) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces

$$(-a)(-a^{-1}) = -a(-a^{-1}) = -[-aa^{-1}] = aa^{-1} = 1.$$

Luego $-a^{-1}$ es el inverso de $(-a)$.

(vii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, ya sabemos que si $a = 0$ ó $b = 0$ entonces $ab = 0$, veamos entonces el recíproco. Supongamos que $ab = 0$, debemos probar que alguno de ellos es cero. Supongamos que uno no es cero; por ejemplo a, entonces existe a^{-1}. Multiplicando la igualdad $ab = 0$ por a^{-1} se obtiene:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0.$$

El segundo miembro es cero y el primero es $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$. Así que $b = 0$.

(viii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Probemos que $a^{-1}b^{-1}$ es el inverso de ab:

$$(ab)\left(a^{-1}b^{-1}\right) = \left((ab)a^{-1}\right)b^{-1} = \left((ba)a^{-1}\right)b^{-1} = \left(b(aa^{-1})\right)b^{-1} = (b \cdot 1)\, b^{-1} = bb^{-1} = 1.$$

¿qué propiedad se ha aplicado en cada paso?

■

Ejercicio II.5. Prueba las siguientes propiedades:

1. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces $a + (b + c) + d = (a + b) + (c + d)$ y $a(bc)d = (ab)(cd)$.
2. $(-a)(-b) = ab$, $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $(-1)a = -a$, $a \in \mathbb{R}$.
4. $-(a + b) = (-a) + (-b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
5. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \neq 0$ y $b \neq 0$ si y sólo si $ab \neq 0$.
6. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \neq b$ si y sólo si $-a \neq -b$.
7. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \neq b$ si y sólo si $a^{-1} \neq b^{-1}$.
8. Prueba que si $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $ax = ay$ entonces $x = y$.
9. Prueba que si $a, x, y \in \mathbb{R}$ y $a + x = a + y$ entonces $x = y$.

DEFINICIÓN 1.3 *Dados dos números reales a y b,*

- *se llama* resta *o* diferencia *de a menos b y se denota por $a - b$, al número real $a + (-b)$.*
- *si $b \neq 0$, se llama* cociente *o* división *de a entre b y se denota por cualquiera de las siguientes formas*

$$a/b \qquad \frac{a}{b} \qquad a : b$$

al número real ab^{-1}.

Algunas propiedades referidas a la diferencia y al cociente son las siguientes:

PROPOSICIÓN 1.4

(i) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $-(a - b) = b - a$.

(ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{1} = a$ y si $a \neq 0$, $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

(iii) *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $bc \neq 0$ *(una forma de decir que ni* b *ni* c *son cero), entonces* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a\,c}{b\,c}$.

(iv) *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $c \neq 0$, *entonces* $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$.

(v) *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $b \neq 0$, *entonces* $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$.

(vi) *Si* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $bd \neq 0$, *entonces* $\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d} = \dfrac{a\,c}{b\,d}$.

(vii) *Si* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $bcd \neq 0$, *entonces* $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a\,d}{b\,c}$.

(viii) *Si* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $bd \neq 0$, *entonces* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

Demostración

(i) Veamos que $b - a$ es el opuesto de $a - b$,

$$(a - b) + (b - a) = (a + (-b)) + (b + (-a)) = a + 0 + (-a) = a + (-a) = 0.$$

(iii) $\dfrac{a}{b} = ab^{-1} = a \cdot 1 \cdot b^{-1} = a(cc^{-1})b^{-1} = (ac)(c^{-1})b^{-1}) = (ac)(bc)^{-1} = \dfrac{ac}{bc}$.

(vii) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = ab^{-1}\left(cd^{-1}\right)^{-1} = ab^{-1}c^{-1}d = ad(bc)^{-1} = \dfrac{a\,d}{b\,c}$.

Ejercicio II.6. Prueba el resto de las propiedades de esta proposición.

■

2 Propiedades de orden de los números reales.

Los siguientes axiomas nos permitirán definir un orden en $\mathbb{R}$

AXIOMAS DE ORDEN

Existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que se denota por $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos son llamados *positivos*, tales que se verifican las dos siguientes propiedades:

- Dado $a \in \mathbb{R}$ sólo puede darse una de las siguientes:

  o bien $\quad a \in \mathbb{R}^+ \quad$ o bien $\quad a = 0 \quad$ o bien $\quad -a \in \mathbb{R}^+$.

  En otras palabras, todo número real o es positivo o es cero o su opuesto es positivo, en cuyo caso se llamará *negativo*.

- Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, se verifica que $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $ab \in \mathbb{R}^+$. Esto es, la suma y producto de números positivos son positivos.

Observa que una primera consecuencia de estos axiomas es que $1 + 1 \neq 0$, ya que si $1 + 1 = 0$, entonces $1 = -1$ luego $1 \in \mathbb{R}^+$ y también $-1 \in \mathbb{R}^+$, en contra del primero de estos axiomas.

DEFINICIÓN 2.1

- *Diremos que un número real a es* menor *que b, o que b es* mayor *que a y se denota por $a < b$ o por $b > a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.*
- *Diremos que un número real a es* menor o igual *que b, o que b es* mayor o igual *que a y se denota por $a \leq b$ o por $b \geq a$, si $a < b$ ó $a = b$.*

Según esta definición escribir $a > 0$ es lo mismo que $a = a - 0 \in \mathbb{R}^+$, así que el conjunto de los números positivos puede definirse por comprensión de la siguiente forma:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 0\}.$$

Además, si un número x es negativo entonces $-x \in \mathbb{R}^+$, luego $-x > 0$; pero también, como $0 - x = -x \in \mathbb{R}^+$, es $0 > x$. El conjunto de los números negativos se denota por

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < 0\}.$$

Ejercicio II.7. Prueba la regla de los signos para el producto; esto es,

- Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $ab > 0$.
- Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $ab < 0$.
- Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $ab > 0$.

PROPOSICIÓN 2.2

(i) $1 > 0$ *y* $-1 < 0$.

(ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$ *y* $b < c$, *entonces* $a < c$.

(iii) Dados dos números reales a y b cualesquiera sólo una de las siguientes se verifica[1]*:*

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b.$$

(iv) Si $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$ *para cada* $c \in \mathbb{R}$ *es* $a + c < b + c$.

(v) Si $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$ *para cada* $c > 0$ *es* $ac < bc$.

(vi) Si $a \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$ *entonces* $\dfrac{1}{a} > 0$.

[1] Esta propiedad es conocida como *propiedad de tricotomía*

Demostración

(i) Puesto que $1 \neq 0$ sólo es posible $1 \in \mathbb{R}^+$ ó $-1 \in \mathbb{R}^+$. Por el segundo de los axiomas de orden, si fuera $-1 \in \mathbb{R}^+$ entonces debería ser $1 = (-1)(-1) \in \mathbb{R}^+$ lo cual es una contradicción; así pues, $1 \in \mathbb{R}^+$ y por tanto $1 > 0$. Además, $-1 \in \mathbb{R}^+$ luego $-1 < 0$.

(ii) Supongamos que $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b \in \mathbb{R}^+$. Por el segundo de los axiomas de orden, $(b-a)+(c-b) \in \mathbb{R}^+$, de donde $c - a \in \mathbb{R}^+$; esto es, $a < c$.

(iii) Esta propiedad resulta directamente al aplicar el primero de los axiomas de orden.

(iv) Si $a < b$, es $b - a \in \mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo $b - a > 0$, pero $b - a = (b+c) - (a+c)$, luego $(b+c) - (a+c) > 0$, y de aquí $a + c < b + c$.

(v) Si $a < b$, $b - a \in \mathbb{R}^+$ y si $c > 0$ es $c \in \mathbb{R}^+$, del segundo axioma resulta que $(b-a)c \in \mathbb{R}^+$; esto es, $bc - ac > 0$, de donde, $ac < bc$.

(vi) Si $a > 0$ es $a \in \mathbb{R}^+$ y $1/a \neq 0$, si fuera $1/a \notin \mathbb{R}^+$, sería $-1/a \in \mathbb{R}^+$. Pero por el segundo axioma $a(-\frac{1}{a}) \in \mathbb{R}^+$, pero $a(-\frac{1}{a}) = -1 \notin \mathbb{R}^+$, lo cual es una contradicción. Así pues, $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo, $\frac{1}{a} > 0$.

■

Ejercicio II.8. Prueba las siguientes propiedades

(a) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a < a + k$. para cada $k > 0$.

(b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ para cada $c < 0$ es $ac > bc$.

(c) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces $-a > -b$.

(d) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $0 < a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(e) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

Ejercicio II.9. Prueba la regla de los signos para la división; esto es,

- Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $\frac{a}{b} > 0$.
- Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $\frac{a}{b} < 0$.
- Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $\frac{a}{b} > 0$.

Ejercicio II.10. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c < d$, estudia en qué casos se verifica $ac < bd$.

Ejercicio II.11. Prueba que si $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ y $a^2 > b^2$ entonces[2] $a > b$.

En la siguiente proposición vemos una forma de caracterizar cuando $a \leq b$ que puede resultar muy útil.

[2] Para un número real x se define $x^2 = x \cdot x$

PROPOSICIÓN 2.3 *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ *si y sólo si* $a < b + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

DEMOSTRACIÓN La condición necesaria se deduce del ejercicio II.8(a), ya que $a \leq b < b + \varepsilon$, sea cual sea $\varepsilon > 0$.

Para probar la condición suficiente procedamos por reducción al absurdo: supongamos que $a < b+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ y que $a > b$. Entonces, $a - b > 0$. Como $a < b + \varepsilon$ debe ser cierto para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\varepsilon = a - b$ y se obtiene, $a < b + (a - b) = a$, lo cual es falso. ■

Ejercicio II.12. Prueba que si $z \in \mathbb{R}^+$ entonces existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta < z$.

3 Números naturales, números enteros y números racionales.

Hemos visto que $1 > 0$, sumando 1 en esta desigualdad resulta que $1 + 1 > 0 + 1 = 1$ (¿qué propiedad se ha aplicado?). Podemos continuar sumando 1 a la desigualdad resultante obteniendo que

$$0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 + 1 < \cdots$$

A estos números que se van obteniendo al sumar sucesivamente 1, los vamos a representar de la siguiente forma: al número $1 + 1$ lo denotamos por 2; esto es, $2 = 1 + 1$, al número $2 + 1$, por 3; esto es, $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, y se sigue así

$$\begin{gathered} 4 = 3 + 1 \\ 5 = 4 + 1 \\ 6 = 5 + 1 \\ 7 = 6 + 1 \\ 8 = 7 + 1 \\ 9 = 8 + 1 \end{gathered}$$

Ejercicio II.13. Prueba que $4 = 2 + 2$ y que $9 = 6 + 3$.

Hasta aquí hemos usado los símbolos, que llamaremos *dígitos*, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 8 y 9. También los llamamos números de una *cifra*. Para continuar representando los siguientes números que se obtienen al ir sumando 1, usaremos lo que se conoce como *representación decimal*. Esto consiste en lo siguiente:

- $9 + 1$ se representa por 10, $10 + 1$, por 11, $10 + 2$ por 12 y así, sucesivamente, hasta llegar a $10 + 10$ que se representa por 20 porque $10 + 10 = 2 \cdot 10$; en efecto,

  $$20 = 10 + 10 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = (1 + 1) \cdot 10 = 2 \cdot 10.$$

  Deberías indicar qué (propiedad o definición) se ha usado en cada igualdad.

- Se sigue ahora representando $20 + 1$ por 21, $20 + 2$ por 22, etc. hasta llegar a $20 + 10$ que se representará por 30, ya que $20 + 10 = 3 \cdot 10$.

- De este modo se van obteniendo los números de dos $(1 + 1)$ cifras: si "pq" es un número de dos cifras, esto significa que p y q son dígitos y

  $$\text{"pq"} = \text{p} \cdot 10 + \text{q}.$$

- El último número de dos cifras sería $99 = 9 \cdot 10 + 9$. Con $99 + 1$ comenzarían los números de tres $(1 + 1 + 1)$ cifras, éste primero se representa por 100 que es $10 \cdot 10$ (intenta demostrarlo), y se continuaría así:

$$\begin{gathered} 101 = 100 + 1 \\ 102 = 100 + 2 \\ \cdots \\ 110 = 100 + 10 \\ \cdots \\ 190 = 180 + 10 \\ 199 = 190 + 9 \end{gathered}$$

- Se continua ahora representando $199 + 1$ por 200, que es $2 \cdot 10 \cdot 10$, y se procede como antes, llegándose a 300 y después 400, y así, sucesivamente, hasta llegar a 999, que es el último número de tres cifras. Luego empezaríamos con cuatro cifras, cuyo primero es $999 + 1$, que se representa por 1.000 y es $10 \cdot 10 \cdot 10$, etc.

Estos números que se van obteniendo sumando sucesivamente 1, comenzando por el 1, se denominan *números naturales*, su definición formal es la siguiente:

DEFINICIÓN 3.1 *Se denomina conjunto de los* **números naturales**, *y se representa por* $\mathbb{N}$, *al menor subconjunto (con la inclusión de conjuntos)*[3] *de los números reales que verifica:*

(i) $1 \in \mathbb{N}$.

(ii) Si $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $k + 1 \in \mathbb{N}$ *(al número* $k + 1$ *se le llama el* siguiente *de* k*).*

En ocasiones se escribe $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ para expresar esas dos condiciones que definen los naturales, los puntos suspensivos indican al lector que en ese conjunto está siempre el siguiente de cada número.

Las dos condiciones (i) y (ii) resultan muy útiles para demostrar que determinadas propiedades se verifican para cualquier número natural. Por ejemplo, supongamos que deseamos probar que si sumamos los n primeros números naturales el resultado es $n(n + 1)/2$. Para $n = 4$ es

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

y $4(4 + 1)/2 = 10$, así que para $n = 4$ se verifica. Podrías pensar que se podría ver para 1, luego para 2, luego para 3, pero ¿cómo estaremos seguro de que eso es cierto para cualquier $n \in \mathbb{N}$?

Llama S al conjunto de los números naturales para los que se verifica esa propiedad. Si se prueba que

(i) $1 \in S$,

(ii) y que si $k \in S$ entonces $k + 1 \in S$,

entonces S es $\mathbb{N}$, puesto que $\mathbb{N}$ es el menor conjunto que verifica esas dos condiciones. Esta técnica de demostración se conoce como *método de inducción*.

Ejercicio II.14. Prueba que (i) y (ii) se verifican para la propiedad $1 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

[3]El menor subconjunto en el sentido de la inclusión es la intersección de todos los conjuntos que verifican esas dos condiciones

Definición 3.2 *Llamamos conjunto de los* **números enteros** *al subconjunto de números reales dado por*

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \in \mathbb{N} \quad \textit{ó} \quad x = 0 \quad \textit{ó} \quad -x \in \mathbb{N}\}.$$

Así que un número entero es o un número natural, o cero, o el opuesto de un número natural, en ocasiones podemos verlo escrito así:

$$\mathbb{Z} = \{ \quad \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \}$$

Observa que el conjunto de los enteros positivos, que se representa por $\mathbb{Z}^+$, es precisamente $\mathbb{N}$. El conjunto de los números enteros negativos se representa por $\mathbb{Z}^-$.

Definición 3.3 *Llamamos conjunto de los* **números racionales** *al subconjunto de números reales dado por*

$$\mathbb{Q} = \{a/b \in \mathbb{R} : \quad a \in \mathbb{Z} \quad \textit{y} \quad b \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Como antes el conjunto de los números racionales positivos es presentado por $\mathbb{Q}^+$ y el de los negativos por $\mathbb{Q}^-$.

En ocasiones, se desea considerar el conjunto de los números reales sin el cero, o el de los enteros o racionales sin el cero, en tal caso se utiliza un asterisco para simbolizar esos conjuntos sin el cero; esto es, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ o $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Ejercicio II.15. Ya que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ sus elementos verifican propiedades como la conmutativa, asociativa, etc.; habría que probar, sin embargo, algunas otras. Por ejemplo, ¿la suma o producto de dos racionales es también un número racional?, ¿el opuesto de un número racional también lo es?, ¿el inverso de un racional también lo es? Responde a todas estas preguntas y comprueba que los números racionales verifican todas las propiedades algebraicas dadas para $\mathbb{R}$ (tendrás que comprobar que cada propiedad se verifica cuando sustituyes en su enunciado el conjunto $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$).

Ejercicio II.16. ¿El conjunto $\mathbb{Z}$ verifica también todas las propiedades algebraicas dadas para $\mathbb{R}$?

4 Valor absoluto de un número real.

Definición 4.1 *Dado un número real x se llama* valor absoluto *de x, y se representa por $|x|$, al número*[4]

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \textit{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Como ves $|x| = 0$ sólo si $x = 0$ y si $x \neq 0$ entonces $|x| > 0$. Las principales propiedades del valor absoluto están recogidas en la siguiente proposición:

Proposición 4.2

(i) $a \leq |a|$, *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $-a \leq |a|$, *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$.

[4] Es importante que el número $-x$ lo leas como "el opuesto de x" y no "menos x", en ocasiones se piensa que $-x$ debe ser negativo...

(iii) $|a| = |-a|$, *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$.

(iv) Si $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces* $|a| < b$ *si y sólo si* $-b < a < b$.

(v) $|ab| = |a||b|$, *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.

(vi) $|a + b| \leq |a| + |b|$, *para cualesquiera*[5] $a, b \in \mathbb{R}$.

(vii) $|a - b| \geq ||a| - |b||$, *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración

(i) Si $a < 0$ es $|a| = -a > 0$, luego $a < 0 < |a|$, de donde $a < |a|$. Si por el contrario es $a \geq 0$, entonces $a = |a|$. En cualquiera de los dos casos se verifica $a \leq |a|$.

Ejercicio II.17. Observando la demostración anterior prueba (b) y concluye que $-|a| \leq a \leq |a|$, $a \in \mathbb{R}$.

(iii) Veamos que $|a| = |-a|$ se verifica para cada $a \in \mathbb{R}$:

- Si $a = 0$ es $|0| = |-0| = 0$.
- Si $a > 0$ es $|a| = a$ y $|-a| = -(-a) = a$, luego también se verifica en este caso.
- Si $a < 0$ es $|a| = -a$ y $|-a| = -a$, luego también se verifica en este caso.

(iv) Si $|a| < b$, como $a \leq |a|$, se deduce que $a < b$. También, como $-a \leq |a|$, será $a \geq -|a|$ y de $|a| < b$ se deduce que $-|a| > -b$, luego $-b < -|a| \leq a$. Por ende, $-b < a < b$.

Ejercicio II.18. Usa esta propiedad para probar que $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$

(v) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, pueden presentarse tres casos:

- que los dos sean positivos, $a > 0$ y $b > 0$, en este caso $ab > 0$ y
$$|ab| = ab = |a||b|.$$
- que los dos sean negativos, $a < 0$ y $b < 0$, en este caso $ab > 0$ y
$$|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|.$$
- que uno sea positivo y el otro negativo, por ejemplo, $a > 0$ y $b < 0$, en tal caso $ab < 0$ y
$$|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|.$$

(vi) En el último ejercicio has probado que $|a + b| \leq |a| + |b|$ es equivalente a
$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$
Probemos entonces estas dos desigualdades. Para ello, usamos que
$$-|x| \leq x \leq |x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
En particular, para a y b en $\mathbb{R}$ se tendrá:
$$\begin{array}{c} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}$$
Sumando ambas resultan las desigualdades deseadas.

[5] Esta propiedad es conocida como *desigualdad triangular*

(vii) De nuevo vamos a usar el hecho de que $||a| - |b|| \leq |a - b|$ es equivalente a

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Probemos entonces estas dos desigualdades. Para la primera, uso la desigualdad triangular:

$$|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a| = |a| + | - (b - a)| = |a| + |a - b|.$$

Así que $|b| \leq |a| + |a - b|$; o sea, $|b| - |a| \leq |a - b|$ de donde podemos obtener la primera desigualdad:

$$|a| - |b| = -(|b| - |a|) \geq -|a - b|, \quad \text{esto es,} \quad -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

También para la segunda podemos usar la desigualdad triangular:

$$|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|.$$

De donde, $|a| - |b| \leq |a - b|$.

■

Ejercicio II.19. Prueba las siguientes propiedades:

(a) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad |a - b| \leq |a| + |b|$.

(b) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad |a|^2 = |a^2|$.

(c) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\quad |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

(d) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, $|a/b| = |a|/|b|$.

(e) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica que $|a + b| = |a| + |b|$ si y sólo si $a, b \geq 0$.

Ejercicio II.20. Estudia si

(a) $|4x - 2| \leq 14$ cuando $|x| \leq 3$.

(b) $|a^2 + 4| \leq 8$ cuando $|a| \leq 2$.

(c) $|x^2 - 2x + 3| < 12$ cuando $|x| \leq 2$.

(d) $7 - |x| \leq 3$ cuando $|x| \geq 4$.

(e) $\dfrac{5}{|x|} < 3$ cuando $|x| \geq 2$.

(f) $\dfrac{1}{7 - |x|} > 4$ cuando $|x| \geq 4$.

(g) $|3x - 2| > 10$ cuando $|x| \geq 6$.

(h) $|3x + 2| > 10$ cuando $|x| \geq 6$.

(i) $\dfrac{3}{2x + 1} < 4$ cuando $|x| \geq 2$.

(j) $\dfrac{|x + 2|}{7 - |x|} < 2$ cuando $|x| < 4$.

(k) $\dfrac{|x^2 + 2x - 3|}{|x - 4|} < 51$ cuando $5 < |x| \leq 6$.

(l) $\dfrac{|x^2 + 2x - 3|}{|x - 4|} < 6$ cuando $|x| \leq 2$.

5 Propiedad de completitud de los números reales.

AXIOMA DE COMPLETITUD DE DEDEKIND

Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que

(a) $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$,

(b) $A \cup B = \mathbb{R}$,

(c) si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a < b$.

En estas condiciones existe un único número real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

(i) si $u < \alpha$ es $u \in A$,

(ii) si $u > \alpha$ es $u \in B$.

Puesto que $A \cup B = \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ debe ser $\alpha \in A$ o $\alpha \in B$.

Ejercicio II.21. Prueba que de las condiciones (a), (b) y (c) se deduce que A y B forman una partición de $\mathbb{R}$ (¿qué es una partición?, varios conjuntos forman una partición de otro $M \neq \emptyset$, cuando son no vacíos, disjuntos dos a dos y la unión de todos ellos es M).

Ejercicio II.22. Estudia si los conjuntos

$$A = \{x : \; x^2 \leq 2 \quad \text{ó} \quad x < 0\} \qquad \text{y} \qquad B = \{x : \; x^2 > 2 \quad \text{y} \quad x > 0\}$$

verifican las condiciones del axioma de completitud, ¿qué verifica el número α? (responde a esto si se verifican las condiciones del axioma).

Ejercicio II.23. Estudia si los conjuntos $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ verifican las condiciones del axioma de completitud.

6 Conjuntos acotados: principio del supremo.

Definición 6.1 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ y $E \neq \emptyset$,*

- *Un número real a se llama* **cota superior** *de E si $x \leq a$, $x \in E$. Se dice que E está* **acotado superiormente** *si existe alguna cota superior para E.*
- *Un número real b se llama* **cota inferior** *de E si $b \leq x$, $x \in E$. Se dice que E está* **acotado inferiormente** *si existe alguna cota superior para E.*
- *Diremos que E está* **acotado** *si lo está superior e inferiormente.*

Ejercicio II.24. ¿Una cota superior de E debe pertenecer a E? ¿Una cota superior de E puede pertenecer a E?

Ejercicio II.25. ¿Qué podrías decir de un conjunto $E \neq \emptyset$ tal que el número a es a la vez cota superior y cota inferior de E? ¿cuál es su supremo? ¿y el ínfimo?

Ejercicio II.26. Estudia si los siguientes conjuntos están acotados encontrando cotas superiores e inferiores:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \quad 2 < x \leq 3\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > -1\}$.

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \leq 2\}$.

(d) $A = \{x \in \mathbb{Q} : \quad -3 \leq x \leq -5\}$.

(e) $A = \{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N}\}$.

DEFINICIÓN 6.2 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ y $E \neq \emptyset$,*

- *Se dice que un número real α es el* **supremo** *de E, y se expresa $\alpha = sup(E)$, si*

  (i) α es cota superior de E

  (ii) y $\alpha \leq a$, para cualquier otra cota superior a de E.

  Si el supremo α de E pertenece al conjunto E; esto es, $\alpha \in E$, se dice que α es el **máximo** *de E, en este caso se expresa $\alpha =$ máx(E).*

- *Se dice que un número real β es el* **ínfimo** *de E, y se expresa $\beta =$ ínf(E), si*

  (i) β es cota inferior de E

  (ii) y $\beta \geq b$, para cualquier otra cota inferior b de E.

  Si el ínfimo β de E pertenece al conjunto E; esto es, $\beta \in E$, se dice que β es el **mínimo** *de E, en este caso se expresa $\beta =$ mín(E).*

Ejercicio II.27. Encuentra el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si existen, de los conjuntos del ejercicio anterior.

En la siguiente proposición se demuestra una caracterización del supremo que te puede resultar muy útil.

PROPOSICIÓN 6.3 *Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces α es el supremo de E si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones*

(i) α es cota superior de E.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in E$ tal que $x > \alpha - \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos primero que α es el supremo de E. En tal caso, α es una cota superior (ver la definición de supremo) así que la condición (i) se verifica, veamos la otra condición. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el número $\alpha - \varepsilon$. Puesto que $\alpha > \alpha - \varepsilon$ y, por ser α el supremo, α es menor o igual que cualquier cota superior, $\alpha - \varepsilon$ no puede ser cota superior de E. Así que es falso que $\alpha - \varepsilon \geq x$, para $x \in E$. Por tanto, existirá algún $x \in E$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$, como queríamos demostrar.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que las condiciones (i) y (ii) se verifican. Entonces α es una cota superior, debemos probar que es menor o igual que cualquier otra cota superior. Sea entonces a una cota superior, por definición debe verificar:

$$a \geq x, \quad \text{para} \quad x \in E$$

Tomemos ahora cualquier $\varepsilon > 0$, por la condición (ii) existe un $x_\varepsilon \in E$ tal que $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$. Entonces

$$a \geq x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon; \quad \text{esto es} \quad \alpha < a + \varepsilon.$$

Pero esto es cierto para cada $\varepsilon > 0$ (ver la proposición 2.3), luego $\alpha \leq a$, como queríamos demostrar. ■

Ejercicio II.28. Prueba que si $E \neq \emptyset$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces β es el ínfimo de E si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones

(i) β es cota inferior de E.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in E$ tal que $x < \alpha + \varepsilon$.

Ejercicio II.29. Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ y llamemos $-E$ al conjunto formado por los opuestos de E; esto es, $x \in E$ si y sólo si $-x \in -E$. Prueba las siguientes:

(a) a es cota superior de E si y sólo si $-a$ es cota inferior de $-E$.

(b) b es cota inferior de E si y sólo si $-b$ es cota superior de $-E$.

(c) α es el supremo de E si y sólo si $-\alpha$ es el ínfimo de $-E$.

(d) β es el ínfimo de E si y sólo si $-\beta$ es el supremo de $-E$.

Ejercicio II.30. Prueba que si $x < y$ entonces $x < \dfrac{x+y}{2} < y$. (Yo lo haría estudiando los signos de $\dfrac{x+y}{2} - x$ e $y - \dfrac{x+y}{2}$).

Ejercicio II.31. Prueba que si $x < y$ entonces $x < \lambda x + (1-\lambda)y < y$, para cada $0 < \lambda < 1$. (Yo usaría la misma idea que en el anterior).

Teorema 6.4 (Principio del supremo) *Cada conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene un supremo.*

Demostración Consideremos un conjunto $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, acotado superiormente. Usaremos el axioma de completitud de Dedekind para probar que E tiene supremo.

Llamemos B al conjunto de las cotas superiores de E. Por hipótesis $B \neq \emptyset$.

Sea $A = \mathbb{R} \setminus B$, este conjunto estará formado por los números reales que no son cotas superiores de E. Para que $A = \emptyset$ debe ser $B = \mathbb{R}$; o sea cualquier número real debería ser cota superior de E. Pero esto es falso ya que si $x \in E \neq \emptyset$, entonces $x - 1 < x$, luego el número real $x - 1$ no es cota superior de E, luego $x - 1 \in A$ y será $A \neq \emptyset$.

Es claro que $A \cup B = \mathbb{R}$.

Veamos ahora que si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $a < b$. Si $a \in A$, a no es cota superior de E, lo cual significa que existe algún $x_0 \in E$ verificando $a < x_0$.

Pero si $b \in B$, b es cota superior, luego $x \leq b$, para cualquier $x \in E$. En particular, $x_0 \leq b$.

De ambas se obtiene que $a < x_0 \leq b$, de donde $a < b$, como queríamos probar.

Ya que los conjuntos A y B verifican las condiciones (a), (b) y (c) del axioma de completitud, podemos asegurar que existe un número real α tal que

(i) si $u < \alpha$ es $u \in A$,

(ii) si $u > \alpha$ es $u \in B$.

Ya que $A \cup B = \mathbb{R}$, debe ser $\alpha \in A$ o bien $\alpha \in B$. Así pues, para cada $a \in A$ debe ser $a \leq \alpha$ (si fuera $a > \alpha$, según (ii) debería ser $a \in B$, lo cual es imposible). Por otro lado, para cada $b \in B$ es $\alpha \leq b$.

Veamos que α es entonces el supremo de E:

- α es cota superior de E. Por reducción al absurdo, supongamos que no lo fuera, en tal caso algún elemento $x_0 \in E$ sería $\alpha < x_0$. Pero entonces,

$$\alpha < \frac{x_0 + \alpha}{2} < x_0$$

  y, aplicando (ii), debe ser $\frac{x_0 + \alpha}{2} \in B$, o sea que $\frac{x_0 + \alpha}{2}$ debe ser una cota superior de E. Pero esto se contradice con que $x_0 \in E$ y $\frac{x_0 + \alpha}{2} < x_0$.

  Esa contradicción prueba que α debe ser cota superior de E

- Si b es una cota superior de E entonces $b \in B$, por lo que $\alpha \leq b$, así que α es menor o igual que todas las cotas superiores.

De ambas resulta que α es el supremo de E. ■

Ejercicio II.32. Prueba que cada conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene un ínfimo. (Yo llamaría E al conjunto y consideraría el conjunto $-E$, pero sería un buen ejercicio demostrarlo de forma similar al teorema.)

Ejercicio II.33. Prueba que del principio del supremo puede deducirse el axioma de completitud de Dedekind y deduce que ambas son proposiciones equivalentes.

7 La propiedad arquimediana y sus consecuencias.

Vamos a volver a considerar el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, para establecer que

TEOREMA 7.1 (PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DE $\mathbb{R}$) *El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente en* $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN

Por reducción al absurdo, supongamos que el estamento es falso. Puesto que $\mathbb{N} \neq \emptyset$ si estuviera acotado superiormente tendría un supremo, según el principio del supremo. Esto es, existiría $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$n \leq \alpha, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $\alpha - 1 < \alpha$, el número $\alpha - 1$ no puede ser cota superior del conjunto $\mathbb{N}$, debe existir algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < n_0$, pero esto es lo mismo que decir que $\alpha < n_0 + 1$, siendo $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

■

En ocasiones, el siguiente también se conoce como propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, de hecho es una proposición equivalente:

COROLARIO 7.2 *Si* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $an > b$.

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, ningún número real puede ser cota superior de $\mathbb{N}$, así que ba^{-1} no es cota superior de $\mathbb{N}$, luego debe existir algún $n \in \mathbb{N}$ verificando

$$n > ba^{-1}, \quad \text{y puesto que} \quad a > 0, \quad \text{se deduce que} \quad an > b.$$

■

Si aplicamos este corolario al caso particular de $b = 1$ y $a > 0$ se obtiene que

COROLARIO 7.3 *Dado cualquier número real* $a > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Ejercicio II.34. Prueba que si para dos números a y b es $a < b + \dfrac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq b$.

Ejercicio II.35. Sea $E \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, prueba que α es el supremo de E si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones

(i) α es cota superior de E.

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in E$ tal que $x > \alpha - \dfrac{1}{n}$.

Ejercicio II.36. Usa el último corolario para demostrar que 0 es el ínfimo del conjunto

$$\{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

8 Parte entera de un número real.

Para proceder a la definición y existencia de lo que se conoce como *parte entera* de un número real, vamos a necesitar la siguiente propiedad del conjunto de los números naturales:

TEOREMA 8.1 (BUEN ORDEN DE $\mathbb{N}$) *Todo subconjunto no vacío* M *de* $\mathbb{N}$ *tiene un mínimo que se conoce como* **primer elemento** *del conjunto* M.

DEMOSTRACIÓN En efecto, $M \subset \mathbb{N}$ está acotado inferiormente, puesto que, por ejemplo, 1 es cota inferior. Así que tiene un ínfimo β. Debemos probar que β es el mínimo; esto es, que $\beta \in M$. Observemos que de ser β un número natural sería el primer elemento de M y $\beta \in M$ (¿por qué?), así que si suponemos que $\beta \notin M$, β no puede ser un número natural.

Consideremos el conjunto,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \quad n < \beta\}.$$

Como 1 es cota inferior de M será $1 \leq \beta$, pero como β no es un número natural, no es $\beta = 1$, por lo que debe ser $1 < \beta$. Por tanto, $1 \in A$.

Supongamos que $k \in A$, entonces $k+1 \in A$. En efecto, si no lo estuviera, cumpliría que $k+1 \geq \beta$. De nuevo, como β no es natural debe ser $k+1 > \beta > k$ pero en este caso $k+1$ sería el primer elemento de M, y esto se contradice con la suposición de que β es el ínfimo. Así pues, también $k+1 \in A$.

Hemos visto entonces que $1 \in A$ y que si $k \in A$ entonces $k+1 \in A$ de donde se deduce que $\mathbb{N} \subset A$. Pero como A está acotado superiormente por β, la última afirmación se contradice con la propiedad arquimediana. Y hemos llegado a esta contradicción al suponer que $\beta \notin M$. ∎

Ahora estamos en condiciones de asegurar la existencia de la parte entera:

PROPOSICIÓN 8.2 *Dado un número real x existe un único número entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$m \quad \leq \quad x \quad < \quad m+1,$$

el cual recibe el nombre de **parte entera** *de x y se denota por $\operatorname{ent}(x)$, o también por $[x]$.*

DEMOSTRACIÓN Probemos en primer lugar la existencia. Si el número real x, dado, verifica $x \geq 0$, consideramos el conjunto

$$M = \{n \in \mathbb{N} : \quad n > x\}.$$

Como $M \subset \mathbb{N}$, por el buen orden de $\mathbb{N}$, el conjunto M debe tener un primer elemento que le llamamos p. Este primer elemento verifica que $p \in M$ pero $p-1 \notin M$, luego

$$p-1 \ \leq \ x \ < \ p.$$

Llamamos entonces $\operatorname{ent}(x) = m = p-1$.

Si es $x < 0$, consideramos el conjunto

$$M = \{n \in \mathbb{N} : \quad n \geq -x > 0\}.$$

De nuevo, M tendrá un primer elemento p y este primer elemento verifica que $p \in M$ pero $p-1 \notin M$, luego

$$p-1 \ < \ -x \ \leq \ p, \quad \text{esto es,} \quad -p \ \leq \ x \ < \ -p+1.$$

Y llamamos, en este caso, $\operatorname{ent}(x) = m = -p$.

En cualquiera de los dos casos existe el entero m que verifica:

$$m \quad \leq \quad x \quad < \quad m+1,$$

∎

PROPOSICIÓN 8.3 *Sean m y n dos números naturales tales que $m \geq n$, entonces existen dos números naturales q y r verificando*

$$m = n\,q + r \qquad \text{y} \qquad 0 \leq r < n.$$

Observemos que, dividiendo la igualdad anterior por n, resulta:

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n} \quad \text{siendo} \quad 0 \leq r < n.$$

Por ello, a q se le denomina *cociente* y a r *resto* de la división de m entre n.

DEMOSTRACIÓN Veamos que los números naturales $q = \text{ent}\left(\dfrac{m}{n}\right)$ y $r = m - n\,q$ verifican las condiciones. Claramente, $m = n\,q + r$. Además, por definición de parte entera es

$$q \leq \frac{m}{n} < q + 1.$$

Multiplicando estas desigualdades por $n > 0$ resulta

$$n\,q \leq m < n\,q + n.$$

Sumando a estas desigualdades el número $-nq$ se tendrá

$$0 \leq m - n\,q < n.$$

Pero $r = m - n\,q$, así que se verifica $0 \leq r < n$. ∎

Ejercicio II.37. Prueba que para $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un número entero q y un número natural r verificando

$$m = n\,q + r \qquad \text{y} \qquad 0 \leq r < n.$$

DEFINICIÓN 8.4 *Se dice que un número entero m es* **múltiplo** *de otro número entero p, o también que p es* **divisor** *de m, si existe otro entero q tal que $m = p\,q$.*

Dos números enteros m y n se dicen primos entre sí *si los únicos divisores comunes son 1 y -1.*

Por ejemplo, -12 es múltiplo de -4, de 3, de 1, de -2, etc.

16 y -12 no son primos entre sí puesto que, por ejemplo, $4 \neq 1$ es divisor común a ambos.

Ejercicio II.38. Prueba que si $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, primos entre sí, tales que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

A $\dfrac{p}{q}$ se le llama representación irreducible de ese número racional.

PROPOSICIÓN 8.5 *Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) Si p es un entero divisor de los enteros m y n entonces p es divisor de $m+n$, de $m-n$ y de mn.

(b) Si m y n son enteros primos entre sí existen dos enteros s_0 y t_0 tales que

$$1 = m\,s_0 + n\,t_0.$$

(c) Si p es un número entero divisor de mn, siendo $m, n \in \mathbb{Z}$, y además p y m son primos entre sí entonces p es divisor de n.

DEMOSTRACIÓN

(a) Se tendrá que $m = pq_1$ y $n = pq_2$, entonces

$$m+n = pq_1 + pq_2 = p(q_1+q_2), \qquad m-n = pq_1 - pq_2 = p(q_1 - q_2), \qquad mn = pq_1pq_2 = p(pq_1q_2).$$

Puesto que $q_1 + q_2$, $q_1 - q_2$ y pq_1q_2 son enteros, p es divisor de $m+n$, de $m-n$ y de mn.

(b) Para probar esto consideremos el conjunto

$$S = \{ms + nt > 0 : \quad s, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Es claro que $S \subset \mathbb{N}$, así que tendrá un primer elemento, llamémosle d. Como $d \in S$ existirán s_0 y t_0 tales que $d = m\,s_0 + n\,t_0$.

Probaremos a continuación que d es divisor de m y de n y como $d > 0$ y los únicos divisores comunes de m y n son 1 y -1 deducimos que $d = 1$ y la propiedad quedaría demostrada. Vamos a ello.

Se tiene que $m = dq + r$, donde $0 \leq r < d$, al ser $r = m - dq$, tendremos que

$$0 \leq m - dq < d.$$

Pero $m - dq = m - (m\,s_0 + n\,t_0)q = m(1 - s_0 q) + n(-t_0 q)$, siendo $1 - s_0 q \in \mathbb{Z}$ y $-t_0 q \in \mathbb{Z}$. Eso significa que si fuera $m - dq > 0$ sería $m - dq \in S$, pero eso no es posible puesto que $m - dq < d$ y d es el primer elemento de S. Así que debe ser $m - dq = 0$; esto es, $m = dq$. O sea, que d es divisor de m.

Procediendo de forma análoga, podemos poner $n = dq' + r'$, donde $0 \leq r' < d$, al ser $r' = m - dq'$, tendremos que

$$0 \leq m - dq' < d.$$

Del mismo modo que antes, llegamos a que debe ser $m - dq' = 0$, puesto que si fuera $m - dq' > 0$ estaría en S y debería ser mayor o igual que d. Así que se obtiene que d es también divisor de n.

(c) Si p es divisor de mn entonces $mn = pq$, para algún $q \in \mathbb{Z}$. Si p y m son primos entre sí, aplicando la propiedad anterior, existen s y t tales que

$$1 = ps + mt.$$

Multiplicando esta igualdad por n resulta que $n = nps + nmt$. Como $mn = pq$, sustituyendo,

$$n = nps + nmt = nps + pqt = p(ns + qt).$$

De donde resulta que n es múltiplo de p.

■

Ejercicio II.39. Prueba que si $m \in \mathbb{Z}$ y 2 es divisor de m^2 entonces 2 es divisor de m.

PROPOSICIÓN 8.6 *Si* $\dfrac{m}{n}$ *es un número racional (no nulo), siendo* $m \in \mathbb{Z}^*$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *y* $\dfrac{p}{q}$ *es su representación irreducible; esto es,* $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}$ *y* p *y* q *son primos entre sí, entonces existe un número natural* k *tal que*

$$m = p\,k \quad y \quad n = q\,k.$$

DEMOSTRACIÓN

En efecto, al ser $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$, se tendrá que $m\,q = n\,p$. Esta igualdad nos dice que p es divisor de mq, pero al ser p y q primos entre sí, aplicando la última proposición, debe ser p divisor de m; esto es, existe k tal que $m = pk$.

Sustituyendo $m = pk$ en la igualdad $m\,q = n\,p$, resulta que $pk\,q = n\,p$ y como $p \neq 0$, será $n = qk$. ■

9 Potenciación.

A continuación definimos las potencias enteras de un número real.

DEFINICIÓN 9.1 *Dado $a \in \mathbb{R}$ se define:*

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \quad \text{si } a \neq 0 \\ a^1 &= a \\ a^{k+1} &= a^k \cdot a \quad \text{si } k \in \mathbb{N} \\ a^{-k} &= (a^k)^{-1} = \frac{1}{a^k} \quad \text{si } a \neq 0 \ \text{ y } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Observa, que en la última se dice que a^{-k} es el inverso de a^k, pero, como sabemos, eso significa también que a^k es el inverso de a^{-k}; esto es,

$$a^k = \left(a^{-k}\right)^{-1} = \frac{1}{a^{-k}}$$

En la siguiente estudiamos las propiedades básicas de las potencias:

PROPOSICIÓN 9.2 *Para $a, b \in \mathbb{R}^*$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ se verifican las siguientes:*

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(b) $a^n b^n = (ab)^n$.

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$.

DEMOSTRACIÓN

(a) Fijemos $a \in \mathbb{R}^*$ y $m \in \mathbb{Z}$ y probemos esa igualdad para $n \in \mathbb{N}$ por el método de inducción. Para ello, probaremos que se verifica para $n = 1$ y, también, que si se verifica para $n = k$ entonces se verifica para $n = k+1$. Esto demostrará que se verifica para cada $n \in \mathbb{N}$. Con ello, sólo nos restará probarlo para los enteros $n \leq 0$. Comencemos.

Para $n = 1$, tendremos que $a^m a^1 = a^m a$, si $m \geq 0$, entonces $a^m a = a^{m+1}$, por definición. Si $m < 0$, entonces, $-m \in \mathbb{N}$ y por la definición

$$a^m a = \frac{1}{a^{-m}} a = \frac{a}{a^{-m}} = \frac{a}{a^{-m-1}a} = \frac{1}{a^{-m-1}} = a^{m+1}.$$

Hemos usado la simplificación de $\dfrac{a}{a^{-m-1}a}$ en virtud de la proposición 1.4.

Así que, para $n = 1$ se verifica. Supongamos ahora que se verifica para $n = k$ (hipótesis de inducción); esto es, $a^m a^k = a^{m+k}$.

Multiplicando esa igualdad por a, será $a^m a^k a = a^{m+k} a$. El primer miembro es

$$a^m a^k a = a^m a^{k+1}.$$

El segundo miembro es

$$a^{m+k} a = a^{m+k+1}.$$

De ambos, $a^m a^{k+1} = a^{m+k+1}$ como queríamos probar. Por tanto, la propiedad se verifica para cualquier número natural n; esto es, hemos probado, que para cualquier $a \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ es

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

También para $n = 0$ se verifica ya que

$$a^m a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}.$$

Supongamos entonces, para terminar, que $n < 0$, entonces,

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} a^{-n}}.$$

Pero ahora, $-n \in \mathbb{N}$ y hemos probado que $a^{-m} a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}$, así que

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m} a^{-n}} = \frac{1}{a^{(-m)+(-n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, probemos que $a^n b^n = (ab)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, por inducción sobre n.
Para $n = 1$ es claro que se verifica: $a^1 b^1 = ab = (ab)^1$.
Supongamos que es cierto para $n = k$ (hipótesis de inducción); esto es, $a^k b^k = (ab)^k$.
Multiplicando esa igualdad por ab se obtiene $a^k b^k (ab) = (ab)^k (ab)$. El primer miembro es,

$$a^k b^k (ab) = (a^k a)(b^k b) = a^{k+1} b^{k+1}.$$

Y el segundo miembro es,

$$(ab)^k (ab) = (ab)^{k+1}.$$

De ambos, $a^{k+1} b^{k+1} = (ab)^{k+1}$. Por tanto, la propiedad se verifica para $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$ entonces $a^0 b^0 = 1 = (ab)^0$, luego también se verifica. Sea entonces, $n \in \mathbb{Z}$ y $n < 0$, entonces

$$a^n b^n = \frac{1}{a^{-n}} \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} b^{-n}} = \frac{1}{(ab)^{-n}} = (ab)^n.$$

Ejercicio II.40. Usa la misma técnica para probar la propiedad (c)

■

Proposición 9.3 *Si $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces, $x < y$ si y sólo si $x^n < y^n$.*

Demostración Vamos a probar por inducción que $x < y$ implica que $x^n < y^n$.

Si $n = 1$ es trivial. Supongamos que es cierto para $n = k$ (hipótesis de inducción); esto es, $x < y$ implica que $x^k < y^k$, entonces,

$$x^{k+1} = x^k x < y^k x < y^k y = y^{k+1}$$

Veamos el recíproco, partimos ahora de $x^n < y^n$ y debemos probar que $x < y$. Si fuera $y < x$, por la implicación anterior, sería $y^n < x^n$ pero esto no es posible. Por tanto, debe ser $x \leq y$. Pero tampoco puede ser $x = y$ ya que sería $x^n = y^n$. Por ende, $x < y$.

■

Ejercicio II.41. Prueba que es falso que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x < y$ si y sólo si $x^n < y^n$.

Ejercicio II.42. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ prueba que $x > y$ si y sólo si $x^{-n} < y^{-n}$.

Ejercicio II.43. Prueba que para $a, b \in \mathbb{R}^*$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ se verifican las siguientes:

(a) $(a^m)^n = (a^n)^m$.

(b) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

(c) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Ejercicio II.44. Niega la proposición: $(a+b)^n = a^n + b^n$, para $n \in \mathbb{Z}$ y $a, b \in \mathbb{R}^*$. ¿cuál de las dos proposiciones es verdadera, esa o su negación?

Ejercicio II.45. Prueba que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Ejercicio II.46. Un número entero n se dice que es *par* si puede escribirse como $n = 2m$, siendo $m \in \mathbb{Z}$, en caso contrario se dice *impar*. Prueba que si n es par entonces $x^n > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^*$ y si n es impar entonces $x^n > 0$ si $x \in \mathbb{R}^+$ y $x^n < 0$ si $x \in \mathbb{R}^-$.

Ejercicio II.47. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ y n es par entonces $x^n > 0$ para cualquier $x \notin 0$.

Ejercicio II.48. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ y n es par entonces $x^n = |x|^n$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio II.49. Sea $x \in \mathbb{R}$. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ y n es impar entonces $x^n > 0$ si $x > 0$ y $x^n < 0$ si $x < 0$.

Ejercicio II.50. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $x^n = y^n$ si y sólo si $x = y$.

Ejercicio II.51. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ y n es impar entonces $x^n = y^n$ si y sólo si $x = y$.

Ejercicio II.52. Prueba que $x^n > x$ si $x > 1$.

Ejercicio II.53. Prueba que $x^n < x$ si $0 < x < 1$.

10 Radicación.

Para poder definir las raíces (cuadradas, cúbicas, etc.) necesitamos asegurar la existencia de números reales x que verifiquen igualdades del tipo $x^n = y$. Éste será entonces nuestro primer objetivo. En el siguiente lema vamos a probar una desigualdad que nos resultará útil en ese propósito.

LEMA 10.1 *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $0 < \varepsilon < 1$ *entonces*

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN Lo probaremos por inducción. Para $n = 1$, al ser $1 < 3$ y $\varepsilon > 0$ es $\varepsilon < 3\varepsilon$ y, por tanto, $1 + \varepsilon < 1 + 3\varepsilon$.

Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$ (hipótesis de inducción); esto es, $(1+\varepsilon)^k < 1 + 3^k\varepsilon$. Entonces,

$$(1+\varepsilon)^{k+1} = (1+\varepsilon)^k(1+\varepsilon) < (1+3^k\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1 + 3^k\varepsilon + \varepsilon + 3^k\varepsilon^2 = 1 + (3^k + 1 + 3^k\varepsilon)\varepsilon.$$

Bastará probar, para terminar, que $3^k + 1 + 3^k\varepsilon < 3^{k+1}$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & 3^k,\ k \geq 1 \\ 3^k\varepsilon & < & 3^k,\ \text{a ser } \varepsilon < 1 \end{array}$$

Luego, $3^k + 1 + 3^k\varepsilon < 3^k + 3^k + 3^k = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$. ■

TEOREMA 10.2 *Sea $a \geq 0$ un número real y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un único real $x \geq 0$ tal que $x^n = a$.*

DEMOSTRACIÓN

Es claro que si $a = 0$ entonces $x = 0$, así que supondremos que $a > 0$ y consideremos el conjunto

$$E = \{t : \quad t > 0,\ t^n < a\}.$$

Probaremos que este conjunto está acotado superiormente y que, por tanto, tiene supremo. A continuación veremos que este supremo es precisamente el número x que verifica $x^n = a$.

E está acotado superiormente por $a + 1$. En efecto, si $t \in E$ y $t \leq 1$ entonces

$$t \leq 1 < a + 1.$$

Y si $t > 1$ entonces

$$t < t^n < a < a + 1.$$

Por el principio del supremo E tiene un supremo que llamaremos x. Claramente $x > 0$. Vamos a probar que $x^n = a$ viendo que ni $x^n < a$ ni $x^n > a$ son posibles.

Supongamos en primer lugar que fuera $x^n < a$. En tal caso, $a - x^n > 0$ y $\dfrac{a - x^n}{(3x)^n} > 0$.

Existe entonces un número $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$ tal que

$$\varepsilon < \frac{a - x^n}{(3x)^n}; \quad \text{esto es,} \quad \varepsilon(3x)^n < a - x^n.$$

Por lema anterior, $(1 + \varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon$ luego

$$x^n(1 + \varepsilon)^n < x^n\,(1 + 3^n\varepsilon) = x^n + (3x)^n\varepsilon < x^n + (a - x^n) = a.$$

Por lo que $(x + \varepsilon x)^n = x^n(1 + \varepsilon)^n < a$ y esto significa que $x + \varepsilon x \in E$.

Pero $x + \varepsilon x > x$ y esto se contradice con que x sea el supremo de E. A esta contradicción se ha llegado por suponer que $x^n < a$. Así que $x^n \geq a$.

Supongamos ahora que es $x^n > a$. En este caso, $x^n - a > 0$ y existirá $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$ tal que

$$\varepsilon < \frac{x^n - a}{3^n a}; \quad \text{esto es,} \quad \varepsilon 3^n a < x^n - a.$$

De donde, $\varepsilon 3^n a + a < x^n$ y sacando factor común a resulta $a(\varepsilon 3^n + 1) < x^n$. Usando de nuevo el lema anterior, tenemos que

$$a(1 + \varepsilon)^n < a(\varepsilon 3^n + 1) < x^n.$$

Multiplicando ahora por $\dfrac{1}{(1 + \varepsilon)^n} > 0$ resulta que

$$a < \frac{x^n}{(1 + \varepsilon)^n} = \left(\frac{x}{1 + \varepsilon}\right)^n.$$

Pero esto no es posible ya que $\dfrac{x}{1 + \varepsilon} < x$, lo que significa que $\dfrac{x}{1 + \varepsilon}$ no es cota superior de E, así que existe algún $t \in E$, lo cual significa que $t^n < a$, tal que $\dfrac{x}{1 + \varepsilon} \leq t$, de donde,

$$\left(\frac{x}{1 + \varepsilon}\right)^n \leq t^n < a.$$

Que se contradice con la desigualdad obtenida anteriormente. Así que $x^n > a$ tampoco es posible y sólo nos queda que $x^n = a$. ■

Como pudiste probar en el apartado anterior, si $n \in \mathbb{N}$ es par $x^n \geq 0$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Pero si $n \in \mathbb{N}$ es impar entonces $x^n < 0$ si $x < 0$. Por tanto, si $a < 0$ entonces aplicando la proposición anterior al número $-a > 0$,existe $x > 0$ tal que:

$$x^n = -a.$$

Si n es impar es $(-1)^n = -1$ y podemos escribir:

$$(-x)^n = ((-1)x)^n = (-1)^n x^n = (-1)(-a) = a.$$

Así pues, si n es impar y $a < 0$ existe un único $y < 0$ tal que $y^n = a$

Ya estamos en condiciones de definir la raíz n-ésima:

Definición 10.3 *Dado $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se llama* **raíz n-ésima** *de a, y se denota por $\sqrt[n]{a}$, al número $x \geq 0$ tal que $x^n = a$; esto es, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \geq 0$.*

Si $a < 0$ y $n \in \mathbb{N}$, con n impar, se llama **raíz n-ésima** *de a, y se denota por $\sqrt[n]{a}$, al número $y < 0$ tal que $y^n = a$; esto es, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a < 0$.*

Para $n = 2$, $\sqrt[2]{a}$ se denomina raíz cuadrada y se denota simplemente por $\sqrt{a}$.

Para $n = 3, 4, \ldots$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ se denominan raíz cúbica, cuarta, etc.

Las propiedades de la radicación son las siguientes:

Proposición 10.4 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se verifican las siguientes propiedades:*

(a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$, *si* $a > 0$ *y* $p \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, *si* $a \geq 0$.

(c) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$, *si* $a,\ b \geq 0$.

(d) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$, *si* $a \geq 0$ *y* $p \in \mathbb{N}$.

(e) $\sqrt[n]{a^n} = a$ *si* n *es impar.*

(f) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ *si* n *es par.*

Demostración

(a) Si llamamos $x = \sqrt[n]{a} \geq 0$, es $x^n = a$, luego, elevando a p, será

$$(x^n)^p = a^p; \quad \text{pero} \quad (x^p)^n = x^{np} = (x^n)^p.$$

Así que, $(x^p)^n = a^p$, luego $x^p = \sqrt[n]{a^p}$, como queríamos probar.

(b) Por definición, es $\left(\sqrt[np]{a^p}\right)^{np} = a^p$, pero esto es lo mismo que

$$\left(\left(\sqrt[np]{a^p}\right)^n\right)^p = a^p,$$

de donde, al ser $a \geq 0$ y $\sqrt[np]{a^p} \geq 0$, es $\left(\sqrt[np]{a^p}\right)^n = a$ de donde, $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$.

(c) Llamemos $u = \sqrt[n]{a}$ y $v = \sqrt[n]{b}$ entonces $u^n = a$ y $v^n = b$, de donde,

$$(uv)^n = u^n\, v^n = a\, b.$$

Así que $uv = \sqrt[n]{ab}$, como queríamos demostrar.

(d) Llamando $x = \sqrt[np]{a}$, será $x^{np} = a$. Pero

$$x^{pn} = (x^n)^p = a.$$

Por tanto, $x^n = \sqrt[p]{a}$, de donde $x = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$.
También, $x^{pn} = (x^p)^n = a$, así que, $x^p = \sqrt[n]{a}$, y $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$.

(e) Al ser n impar como $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = a^n$ debe ser $\sqrt[n]{a^n} = a$.

(f) Al ser n par es $a^n \geq 0$ y, por definición, $\sqrt[n]{a^n} \geq 0$. Ya que $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = a^n = |a|^n$, resultará que $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

■

Ejercicio II.54. Prueba las siguientes propiedades:

(a) Si n es impar: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

(b) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$, si $a < 0$, n es impar y $p \in \mathbb{Z}$.

(c) $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, si $a < 0$ y n y p son impares.

(d) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$, si n es impar.

(e) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, si $a \geq 0$ y $b > 0$.

(f) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, si $b \neq 0$ y n impar.

(g) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$, si $a < 0$ y n y p son impares.

Ejercicio II.55. Estudia la veracidad de la siguiente propiedad: si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Definición 10.5 *Si $a \geq 0$, para $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$, se define $a^{\frac{m}{n}} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.*

Para que esta definición tenga sentido, si $m, p \in \mathbb{Z}^*$, $n, q \in \mathbb{N}$ y $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$ debe cumplirse que

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Veamos que esta igualdad es, efectivamente, cierta. Para ello, supongamos que $\frac{p}{q}$ es irreducible.

Aplicando la proposición 8.6 existe un natural k tal que $m = pk$ y $n = qk$, entonces

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[qk]{a^{pk}} = \sqrt[qk]{(a^p)^k} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Ejercicio II.56. Para $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $m, n \in \mathbb{Q}$; esto es $m = p_1/q_1$ y $n = p_2/q_2$, siendo $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, se verifican las siguientes:

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(b) $a^n b^n = (ab)^n$.

(c) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$.

(d) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

(e) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

PROPOSICIÓN 10.6 *Existen números reales que no son racionales y que llamaremos* **irracionales**.

DEMOSTRACIÓN

Para probar la veracidad de esta proposición bastará con encontrar uno: demostraremos que $\sqrt{2}$ no es racional.

Por reducción al absurdo, supongamos que lo fuera. En tal caso tendría una representación irreducible $\dfrac{m}{n}$, y como $\sqrt{2} > 0$ es $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad \text{luego} \quad \frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Así que, $m^2 = 2\,n^2$ y esto significa que 2 es divisor de m^2, luego 2 es divisor de m. Podremos escribir entonces $m = 2p$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Sustituyendo,

$$(2p)^2 = 2\,n^2, \quad \text{de donde} \quad 2\,p^2 = n^2.$$

Luego 2 es divisor de n^2 y, por tanto, también de n.

Hemos llegado a que 2 es divisor de m y de n, lo cual se contradice con el supuesto de que m/n es irreducible. ■

DEFINICIÓN 10.7 *Decimos que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es* **denso** *en $\mathbb{R}$ si entre dos números reales distintos existe uno de A; esto es, si para cada $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$ existe $a \in A$ tal que*

$$x < a < y.$$

PROPOSICIÓN 10.8 *El conjunto de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN

Sean x e y dos números reales tales que $x < y$. Puesto que $y - x > 0$, por la propiedad arquimediana existe un natural q tal que

$$q > \frac{1}{y-x}$$

Llamemos $p = \operatorname{ent}(qx) + 1$. Probemos que $x < p/q < y$. En efecto, por la definición de parte entera, como $p - 1 = \operatorname{ent}(qx)$,

$$p - 1 \le qx < p, \quad \text{luego} \quad p \le qx + 1 \quad \text{y} \quad qx < p.$$

De esta última, $x < p/q$.

Por otra parte, al ser $q > \dfrac{1}{y-x}$ es $qy - qx = q(y - x) > 1$; esto es, $qy > qx + 1$, pero como $p \le qx + 1$, es $qy > p$; esto es, $y > p/q$. ■

Proposición 10.9 *El conjunto de los números irracionales es denso en* $\mathbb{R}$.

Demostración

Sean x e y dos números reales tales que $x < y$. Entonces $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$, aplicando la proposición anterior, existe un número racional r tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad \text{de donde} \quad x < r\sqrt{2} < y.$$

Pero $r\sqrt{2}$ es irracional así que la proposición queda probada. ∎

Ejercicio II.57. Simplifica (expresa de la forma más sencilla que puedas):

(a) $\sqrt[3]{5}\sqrt[5]{25}\sqrt[6]{2}$.

(b) $\frac{\sqrt[7]{16}}{\sqrt[3]{8}}$.

(c) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}}\right)^{54}$.

(d) $4\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{256}$.

(e) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$.

Ejercicio II.58. Prueba que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Ejercicio II.59. Racionaliza (quita los radicales del denominador):

(a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

(d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-3}$.

(e) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}}$.

Nota: Para los dos últimos usa el resultado anterior.

Ejercicio II.60. Ordena de mayor a menor:

$$\sqrt[4]{17}, \quad \sqrt[3]{15}, \quad \sqrt[5]{21}.$$

Nota: Quizás poniéndolos bajo el mismo radical...

En ocasiones necesitaremos encontrar ciertos números reales que verifiquen una igualdad o desigualdad. Esto es lo que se conoce como **resolver una ecuación** (para las igualdades) o **inecuación** (para las desigualdades). Así, por ejemplo, encontrar los números reales x tales que:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

se denomina resolver la ecuación (igualdad). Un ejemplo de resolver una inecuación (desigualdad) sería encontrar los números reales x tales que

$$3x - 2 \leq 2 - (x + 5)$$

El objetivo en ambos casos es llegar a expresiones más simples que las dadas en las que el número x aparezca una sola vez. Así en una ecuación como

$$\frac{3x-6}{8} - 7x = 2 - \frac{x}{2}$$

podemos proceder multiplicando los dos miembros de la igualdad por 8:

$$3x - 6 - 56x = 16 - 4x,$$

Sumar ahora $4x$ a los dos miembros:

$$3x - 6 - 56x + 4x = 16.$$

De donde, $-6 - 49x = 16$, sumando ahora 6 resulta $-49x = 22$ y multiplicando por $-1/49$ resulta

$$x = -\frac{22}{49}$$

Decimos entonces que $-\frac{22}{49}$ es la solución de la ecuación.

No toda ecuación puede "resolverse" directamente de forma tan sencilla, ocasión tendrás de ver muchos ejemplos en los que esto no es posible. Veamos el caso de una ecuación, denominada de segundo grado, del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con} \quad a \neq 0.$$

Como $a \neq 0$ multiplicamos por $1/a$, que también se dice dividir la ecuación por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Ahora observamos que $x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, así que, sustituyendo:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

De aquí,

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Así que,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Lo cual, como ves, sólo es posible si $b^2 - 4ac \geq 0$. Ahora podemos poner

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Que son las dos soluciones que resultan y que las denominaremos **raíces** de la ecuación.

Ejercicio II.61. Prueba que si x_1 y x_2 son las dos raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ entonces

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejercicio II.62. A partir del ejercicio anterior estudia el signo de ax^2+bx+c, para $a \neq 0$, variando $x \in \mathbb{R}$, según que tenga una, dos o ninguna raíz real.

Ejercicio II.63. Prueba que el cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, puede simplificarse, si escribimos $b_0 = b/2$, usando

$$x = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - ac}}{a}.$$

11 Principio de los intervalos encajados.

Definición 11.1 *Llamaremos* **intervalos** *en* $\mathbb{R}$ *a los conjuntos de la forma:*

- $(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\}$, *siendo* $a, b \in \mathbb{R}$.
- $[a,b) = [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x < b\}$, *siendo* $a, b \in \mathbb{R}$.
- $(a,b] =]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leq b\}$, *siendo* $a, b \in \mathbb{R}$.
- $[a,b] \qquad = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\}$, *siendo* $a, b \in \mathbb{R}$.
- $(-\infty,b) =]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : \quad x < b\}$, *siendo* $b \in \mathbb{R}$.
- $(-\infty,b] =]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \leq b\}$, *siendo* $b \in \mathbb{R}$.
- $(a,+\infty) =]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x\}$, *siendo* $a \in \mathbb{R}$.
- $[a,+\infty) = [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x\}$, *siendo* $a \in \mathbb{R}$.
- $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Se llaman intervalos **abiertos** *a los intervalos* (a,b), $(-\infty,b)$ $(a,+\infty)$ *y* $(-\infty,+\infty)$.

Se llaman intervalos **cerrados** *a los intervalos* $[a,b]$, $(-\infty,b]$ $[a,+\infty)$ *y* $(-\infty,+\infty)$.

Se llaman intervalos **semiabiertos** *o* **semicerrados** *a los intervalos* $[a,b)$ *y* $(a,b]$.

Se llama **longitud** *de los intervalos acotados* $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ *o* (a,b) *al número* $b-a$.

Ejercicio II.64. Estudia la acotación de cada uno de los intervalos indicando supremo, ínfimo, máximo y mínimo si lo poseen.

Ejercicio II.65. Prueba que si $[a, b] \subset [c, d]$ entonces se verifica

$$c \le a < b \le d \quad \text{y} \quad b - a \le d - c.$$

Ejercicio II.66. Expresa los siguientes conjuntos en forma de intervalo (o como uniones o intersecciones de intervalos):

(a) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x \le 2 \text{ y } x > 3\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x > 2 \text{ y } x \le 1\}$.

(c) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x < 5 \text{ y } x \le \sqrt{7}\}$.

(d) $\{x \in \mathbb{R} : \quad |x| < 1\}$.

(e) $\{x \in \mathbb{R} : \quad |x| \le \sqrt{2}\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{R} : \quad |x| > 3\}$.

(g) $\{x \in \mathbb{R} : \quad |x + 1| < 2\}$.

(h) $\{x \in \mathbb{R} : \quad -7 - 3x < 5x + 29\}$.

(i) $\{x \in \mathbb{R} : \quad 3/x < 5\}$.

(j) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 > 4\}$.

(k) $\{x \in \mathbb{R} : \quad (x + \frac{1}{2})^2 < 5\}$.

(l) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 4x + 8 \le 0\}$.

(m) $\{x \in \mathbb{R} : \quad 2x^2 - 4x + 8 > 0\}$.

(n) $\{x \in \mathbb{R} : \quad (2x - 1)(3 - x)(x + 2) \le 0\}$.

(o) $\{x \in \mathbb{R} : \quad (2x - 3)(x + 2) \le 0\}$.

(p) $\{x \in \mathbb{R} : \quad \dfrac{x + 2}{2x + 3} \le \dfrac{1}{2}\}$.

(q) $\{x \in \mathbb{R} : \quad \dfrac{2x + 1}{8} \le \dfrac{3}{3x - 4}\}$.

(r) $\{x \in \mathbb{R} : \quad \dfrac{2x - 3}{x + 2} < \dfrac{1}{3} \text{ y } 5x - 1 \le 6\}$.

(s) $\{x \in \mathbb{R} : \quad \dfrac{x + 10}{6} + 1 - \dfrac{4}{x} \ge \dfrac{4 - 5x}{6} + 1\}$.

DEFINICIÓN 11.2 *Diremos que una familia de intervalos cerrados y acotados $[a_n, b_n]$, para $n \in \mathbb{N}$, forma una* **sucesión de intervalos encajados** *si se verifican las dos siguientes condiciones:*

- *La sucesión de intervalos es decreciente; esto es,* $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, *para cada* $n > 1$:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset [a_4, b_4] \supset [a_5, b_5] \cdots$$

Observa que se verifica:

$$\begin{array}{c} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq \cdots \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq b_5 \geq \cdots \\ b_1 - a_1 \geq b_2 - a_2 \geq b_3 - a_3 \geq b_4 - a_4 \geq \cdots \end{array}$$

Además $a_i < b_j$, *para cualquier* $i, j \in \mathbb{N}$.

- *Las longitudes de los intervalos decrece a cero; esto es, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $b_n - a_n < \varepsilon$.

Ejercicio II.67. Estudia si la familia de intervalos $[0, \frac{1}{n}]$ forma una sucesión de intervalos encajados.

TEOREMA 11.3 (PRINCIPIO DE LOS INTERVALOS ENCAJADOS) *Si la familia de intervalos* $[a_n, b_n]$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *forma una sucesión de intervalos encajados existe un único número real* $x \in [a_n, b_n]$, *para* $n \in \mathbb{N}$.

Observa que en este teorema se asegura que la intersección de todos los intervalos que forman la familia está formada por un único número real.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el conjunto $E = \{a_k : \quad k \in \mathbb{N}\}$. E está acotado superiormente, puesto que $a_k < b_1$, $k \in \mathbb{N}$. Sea x el supremo de E.

Dado $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $a_k < b_n$, para cada $k \in \mathbb{N}$, luego todos los b_n son cotas superiores de E, así que $x \leq b_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$x \in [a_n, b_n], \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que x es el único: si hubiera otro $y \in [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, sería $y \geq a_n$, $n \in \mathbb{N}$, lo que significa que y sería cota superior de E. Por tanto, $x \leq y$.

Observemos que si $x < y$ como $x, y \in [a_n, b_n]$, tendríamos que $[x, y] \subset [a_n, b_n]$, para cada n, luego $y - x \leq b_n - a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, si $x < y$, sería $y - x > 0$ y, aplicando la segunda condición de los intervalos encajados, existiría n tal que $b_n - a_n < y - x$, lo cual es una contradicción. Así que $x = y$. ■

12 Representación decimal de los números reales.

A partir de los dígitos de 0 a 9 podemos expresar todos los números naturales. Ya que el conjunto de los enteros lo forman los naturales junto al cero y los opuestos de aquellos, también disponemos de una forma de representarlos. Recordemos que dicha representación se basa en el uso de las potencias de 10; así el número 3574 es

$$3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Ahora vamos a utilizar las potencias negativas de 10 para expresar los demás números reales.

Escribiremos; por ejemplo, $693{,}754$ para expresar el número

$$6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}.$$

A los dígitos que corresponden a esas potencias negativas se les llama *decimales* y, más concretamente, al que corresponde a 10^{-1} se le llama décima, al de 10^{-2} se le llama centésima, etc.

Ahora veremos que cualquier otro número real puede ser expresado de forma parecida. Consideremos $x \in \mathbb{R}^+$, si fuera $x < 0$ bastaría con usar el signo $-$ para tener su representación decimal.

Existe un número natural (único) a_0 (la parte entera de x) tal que

$$a_0 \leq x < a_0 + 1$$

Para este número a_0 ya disponemos de una representación decimal. Observa que de esa igualdad se deduce que $0 \leq x - a_0 < 1$. Así que,

$$0 \leq 10(x - a_0) < 10.$$

Para $10(x - a_0)$ existe otro natural (único) a_1, que será $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que

$$a_1 \leq 10(x - a_0) < a_1 + 1, \text{ luego } a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

De la primera desigualdad podemos deducir que $0 \leq 10(x - a_0) - a_1 < 1$, luego

$$0 \leq 10^2(x - a_0) - 10\, a_1 < 10.$$

Existe entonces otro natural (único) a_2, que será $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que

$$a_2 \leq 10^2(x - a_0) - 10\, a_1 < a_2 + 1, \text{ luego } a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

Prosiguiendo así podemos determinar una familia de intervalos cerrados $[\alpha_n, \beta_n]$, donde

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$
$$\beta_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

tal que $\alpha_n \leq x < \beta_n$. Esa familia forma una sucesión de intervalos encajados, así que determinan un único número real y ya que $x \in [\alpha_n, \beta_n]$, para cada n, ese número x es el único.

Es costumbre usar la notación $3,\overset{\frown}{25}$ para expresar el número $3{,}2525252525\ldots$. Se dice en estos casos que ese número es *periódico* y 25 es su periodo. No es difícil ver que estos números periódicos son racionales. El siguiente procedimiento lo muestra.

Sea $x = 12{,}7\overset{\frown}{32}$, multiplicando por 1000 y restándole $10x$ resulta

$$1000x - 10x = 12732{,}\overset{\frown}{32} - 127{,}\overset{\frown}{32} = 12732 - 127.$$

De donde, $(1000 - 10)x = 12732 - 127$, así que $x = \dfrac{12732 - 127}{1000 - 10}$.

Cualquier número racional puede ser expresado mediante una representación decimal que tiene un número finito de decimales (podríamos decir que los números enteros tienen cero decimales) o es periódico. En efecto, consideremos un número racional positivo m/n. Se puede expresar:

$$m = a_0 n + r_0, \quad \text{esto es} \quad \frac{m}{n} = a_0 + \frac{r_0}{n}$$

Donde $0 \leq r_0 < n$. Consideremos ahora $10r_0$ y n, de nuevo

$$10r_0 = a_1 n + r_1, \quad \text{esto es} \quad \frac{r_0}{n} = a_1 10^{-1} + \frac{r_1}{n} 10^{-1}.$$

Siendo $0 \leq r_1 < n$. Llevándolo a la expresión anterior:

$$\frac{m}{n} = a_0 + a_1 10^{-1} + \frac{r_1}{n} 10^{-1}$$

De nuevo, aplicando lo anterior a $10r_1$ y n, tendremos que

$$10r_1 = a_2 n + r_2, \quad \text{esto es} \quad \frac{r_1}{n} = a_2 10^{-1} + \frac{r_2}{n} 10^{-1}.$$

Siendo $0 \leq r_2 < n$. Llevándolo a la expresión anterior:

$$\frac{m}{n} = a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \frac{r_2}{n} 10^{-2}$$

Este proceso puede continuarse indefinidamente hasta que algún $r_k = 0$. Pero si esto no ocurre tendrán que repetirse las cifras de forma periódica. En efecto, en el proceso vamos dividiendo $10r_k$ entre n, pero los restos r_k de esas divisiones deben ser menores que n, así que después de repetir el proceso n veces algún resto vuelve a aparecer o algún resto es cero. En el primer caso el número racional tendrá un decimal periódico.

Ejercicio II.68. Encuentra la expresión decimal de los siguientes números racionales: $5/7$, $3/11$, $2/25$.

Ejercicio II.69. Halla el número racional que corresponde a los siguientes números decimales: $1,\widehat{1}$; $1,\widehat{9}$; $7{,}12\,\widehat{531}$.

13 Igualdades y desigualdades notables.

Comencemos por introducir una forma de denotar sumas y productos que nos será de utilidad: si a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ escribiremos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{y} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$$

El símbolo $\sum_{i=1}^{n}$ lo leeremos *sumatorio* o *suma* desde $i = 1$ hasta n de... y $\prod_{i=1}^{n}$ lo leeremos *producto* desde $i = 1$ hasta n de...

La propiedad distributiva nos asegura que

$$x \sum_{i=1}^{n} a_i = x(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = xa_1 + xa_2 + \cdots + xa_n = \sum_{i=1}^{n} xa_i.$$

Las propiedades asociativas y conmutativas nos aseguran que

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Otras propiedades del sumatorio son:

- $\sum_{i=p}^{p} a_i = a_p$.
- $\sum_{j=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_i + a_n$.

Ejercicio II.70. Escribe sin el sumatorio:

(a) $\sum_{i=0}^{p} a_i b_i$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

(c) $\sum_{j=0}^{n} a_i x^i$.

(d) $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$.

Ejercicio II.71. Expresa con el signo sumatorio:

(a) $a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 + a_5 b_1$.

(b) $a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + \cdots + a b^{n-1} + b^n$.

(c) $x_1 z^2 + x_2 z^3 + \cdots + x_n z^{n+1}$.

Definición 13.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el* **factorial** *de n y se denota por $n!$ de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{ll} 0! & = \ 1, \\ n! = n \cdot (n-1)!, \quad \text{para } n \geq 1. & \end{array}$$

Para cada $n, k \in \mathbb{Z}$, siendo $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$ se define el **número combinatorio** *n sobre k y se denota por $\binom{n}{k}$, como el número*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Las propiedades básicas de los números combinatorios son:

Proposición 13.2

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

DEMOSTRACIÓN

(i) Es trivial.

(ii) Escribiendo lo qué es cada sumando, buscando denominador común y operando:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{k\cdot n!}{k\cdot(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\cdot n!}{k!(n-k+1)\cdot(n-k)!}\\
&= \frac{k\cdot n!}{k!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\cdot n!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{k\cdot n!+(n-k+1)\cdot n!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{k\cdot n!+n\cdot n!-k\cdot n!+n!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{(n+1)\cdot n!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■

TEOREMA 13.3 (BINOMIO DE NEWTON) *Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se verifica*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n.$$

DEMOSTRACIÓN Procedamos por inducción sobre n. Para $n=1$ es

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b.$$

Lo cual es cierto. Supongamos ahora que es cierto para $n=k$ (hipótesis de inducción); esto es,

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\cdots+\binom{k}{k}b^k.$$

Entonces, multiplicando por $(a+b)$ la igualdad anterior resulta

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} = {} & \binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^kb+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k}{k}ab^k\\
&+\binom{k}{0}a^kb+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\cdots+\binom{k}{k}b^{k+1}\\
= {} & \binom{k}{0}a^{k+1}+\left(\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right)a^kb+\left(\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right)a^{k-1}b^2+\cdots\\
&\cdots+\left(\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right)ab^k+\binom{k}{k}b^{k+1}\\
= {} & \binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k+1}{k}ab^k+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio II.72. Usa el resultado anterior para probar que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Ejercicio II.73. Halla las siguientes potencias:

(a) $(-x+2)^4$. (b) $(-3x^2+y)^5$. (c) $(-1+3x^2y)^3$.

Ejercicio II.74. Del desarrollo de $(3x^2 - x)^17$ halla el término cuya potencia de x sea 20 (si hay alguno).

Teorema 13.4 (Desigualdad de Cauchy) *Para cualesquiera $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \ldots, n$) se verifica*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$

Observa que para $n = 2$ esa desigualdad es

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Demostración Llamemos

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j^2, \qquad B = \sum_{j=1}^{n} b_j^2, \qquad C = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

Vamos a suponer que $B \neq 0$, puesto que en caso contrario la desigualdad sería obvia al ser todos los b_j iguales a cero.

Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j t)^2 \geq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq & \sum_{j=1}^{n} (a_j^2 + 2a_j b_j t + b_j^2 t^2) \\ = & \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + 2t \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + t^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \\ = & A + 2tC + t^2 B \\ = & Bt^2 + 2Ct + A \end{aligned}$$

Así que hemos obtenido que $Bt^2 + 2Ct + A \geq 0$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Pero esto supone que la ecuación $Bt^2 + 2Ct + A = 0$ no puede tener dos soluciones reales, así que

$$(2C)^2 - 4BA \leq 0, \quad \text{esto es,} C^2 - AB \leq 0.$$

Sustituyendo A, B y C por sus expresiones resulta la desigualdad de Cauchy. ■

Ejercicio II.75. Usa la desigualdad de Cauchy para probar que

$$\sup\{xy : \quad x^2 + y^2 = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Teorema 13.5 (Desigualdad de Minkowsky) *Para cualesquiera* $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ *(*$j = 1, \dots, n$*) se verifica*

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}.$$

Observa que para $n = 2$ esa desigualdad es

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$

Demostración Llamemos como antes

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j^2, \qquad B = \sum_{j=1}^{n} b_j^2, \qquad C = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

La desigualdad de Cauchy supone que $C^2 \leq AB$, pero esto es lo mismo que decir que $|C| \leq \sqrt{AB}$ Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2 = & \sum_{j=1}^{n}(a_j^2 + 2a_jb_j + b_j^2 \\
= & \ A + 2C + B \\
\leq & \ A + 2|C| + B \\
\leq & \ A + 2A^{1/2}B^{1/2} + B \\
= & \ (A^{1/2} + B^{1/2})^2
\end{aligned}$$

Hemos obtenido entonces:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2 \leq \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}\right)^2$$

De donde resulta la desigualdad buscada. ∎

Teorema 13.6 (Desigualdad de Bernoulli) *Para cada* $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ *se verifica*

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Demostración Lo probaremos por inducción. Para $n = 2$ es

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$ (hipótesis de inducción); esto es,

$$(1+x)^k > 1 + kx.$$

Multiplicando por $(1 + x)$ resulta,

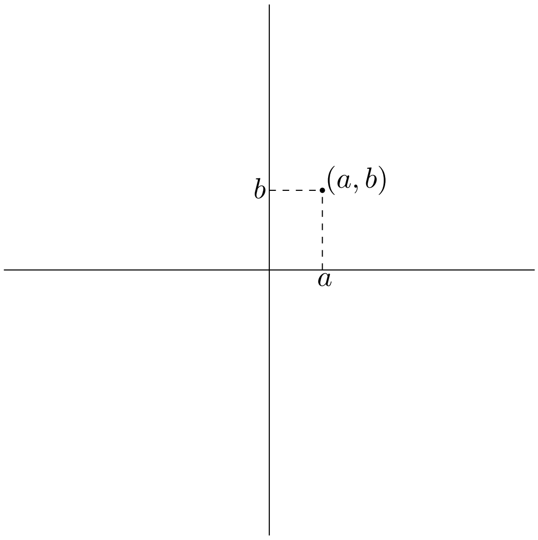
$$(1+x)^{k+1} > (1+x)(1+kx) = 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x.$$

∎

14 Conjunto de los números complejos

No vamos a realizar un estudio exhaustivo de los números complejos, nos limitaremos a dar una idea de lo que son, como se representan y sus operaciones y propiedades básicas.

Llamaremos conjunto de los **números complejos**, y se denota por $\mathbb{C}$ al conjunto formado por todos los pares ordenados de números reales (a, b). Se usará la representación cartesiana de estos números:



La igualdad de dos números complejos (a, b) y (c, d) se establece así

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \;\text{ y }\; b = d.$$

En el conjunto de los números complejos hay definidas dos operaciones:

Suma: Para dos números complejos (a, b) y (c, d) se define así

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Suma: Para dos números complejos (a, b) y (c, d) se define así

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Puede probarse que el conjunto $\mathbb{C}$ con estas dos operaciones verifica las mismas propiedades algebraicas que verifica $\mathbb{R}$ y que hacen que $\mathbb{C}$ sea un cuerpo conmutativo. En particular,

- El elemento nulo es $(0, 0)$.
- El elemento unidad es $(1, 0)$.
- El elemento opuesto de cada número complejo (a, b) es $-(a, b) = (-a, -b)$.
- El elemento inverso de cada número complejo $(a, b) \neq (0, 0)$ es

$$(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}).$$

Ejercicio II.76. Prueba que, efectivamente, $\mathbb{C}$ verifica las mismas propiedades algebraicas que $\mathbb{R}$.

Si $z = (a, b)$ es un número complejo al número real a (primer elemento del par) se le denomina *parte real* de z y se denota por $\Re(z)$ y al número real b se le denomina *parte imaginaria* de z y se le denota por $\Im(z)$. Es importante que observes que tanto la parte real como la imaginaria son números reales.

El conjunto $\{(a, 0) \in \mathbb{C} : \quad a \in \mathbb{R}\}$ se identifica con $\mathbb{R}$. Esto está justificado al ser

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.
- $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

Por esta razón el número $(a, 0)$ se denota simplemente por a.

Al número complejo $(0, 1)$ se le denomina unidad imaginaria y se le denota por i; esto es, $(0, 1) = i$.

Observa que el producto un número real x $((x, 0))$ por la unidad imaginaria es:

$$xi = (x, 0)(0, 1) = (0, x)$$

Usando entonces esas notaciones cualquier número complejo $z = (a, b)$ puede escribirse como

$$z = a + bi = \Re(z) + \Im(z)i.$$

Las potencias de los números complejos se definen de forma análoga a las de $\mathbb{R}$ y verifican las mismas propiedades. Así, por ejemplo,

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad , \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^3 .i = 1.$$

Ejercicio II.77. Observa que las potencias enteras de i repiten su valor cada 4, sabiendo esto halla el valor de

$$i^7, \quad i^{23}, \quad i^{2002}, \quad i^{4n+3} \text{ (si } n \in \mathbb{N}).$$

Para potencias con entero negativo, al igual que en $\mathbb{R}$, se definen a partir del inverso de las potencias enteras positivas:

$$z^{-7} = \frac{1}{z^7}.$$

Ejercicio II.78. Halla las siguientes potencias:

(a) $(1 + 2i)^5$. (b) $(-2 + 3i)^3$. (c) $(1 + i)^{-2}$.

Ejercicio II.79. Realiza las siguientes operaciones:

(a) $(2 + 3i)^2$. (b) $\dfrac{5 + i}{3 - i}$. (c) $7 + i + (5 - i)(4 + 2i)$.

El *conjugado* de un número complejo $z = a + bi$ se define como

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Ejercicio II.80. Prueba que si $z = a + bi$ entonces $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

El *módulo* de un número complejo $z = a + bi$ se define como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicio II.81. Considera dos complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$, prueba que

(a) $|z_1| = |\overline{z_1}|$.

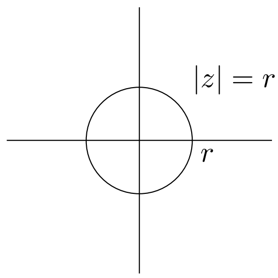
(b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(c) $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$.

(d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Recuerda, por tus estudios de geometría analítica, que los puntos (x, y) de una circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r verifican

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



Puesto que un número complejo $x + yi$ (recuerda que es (x, y)) se representa mediante el punto (x, y), resulta que todos los complejos tales que $|x + yi| = r$ se representan mediante una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r, puesto que

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \text{de donde} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Del mismo modo, si llamamos $z = x + yi$ y $z_0 = x_0 + y_0 i$ resulta que la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r puede escribirse en forma compleja como

$$|z - z_0| = r.$$

Observa si z_1 y z_2 son dos números complejos de módulo 1; esto es, $|z_1| = |z_2| = 1$, entonces ambos complejos están representados en la circunferencia unidad (de radio 1) centrada en el origen. Además, el producto de ambos verifica:

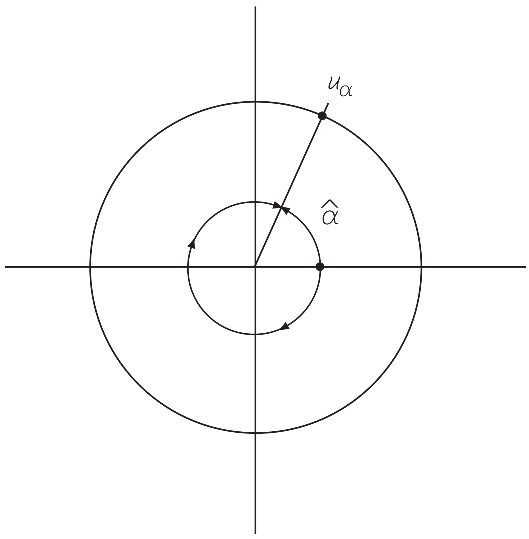
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1.$$

Así que el número complejo también está representado en la misma circunferencia.

Ejercicio II.82. Prueba que si un complejo z está representado en una circunferencia de radio r y centrada en el origen y u es un complejo de módulo 1, entonces el número uz está en aquella circunferencia.

15 Las razones trigonométricas.

Ya hemos visto que el conjunto de complejos $z = (x, y)$ de módulo uno, representado por $\mathcal{U}$, es la circunferencia de centro 0 y radio 1; esto es, $\mathcal{U} = \mathcal{C}(0, 1)$ y que esta circunferencia unidad viene determinada por la igualdad $x^2 + y^2 = 1$.



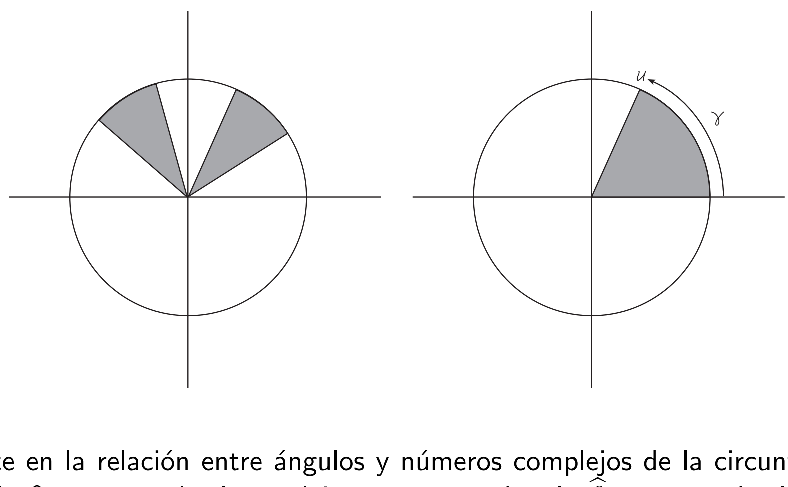
Podemos asociar a cada ángulo $\widehat{\alpha}$ (menor que un completo) un punto u_α sobre la circunferencia unidad. Para ello, fijamos la semirrecta de las abscisas positivas (conjunto de puntos $(x, 0)$ con $x \geq 0$), entonces a cada punto u de la circunferencia unidad corresponderá una y solo una semirrecta, con extremo en el origen de coordenadas, que pasa por ese punto u y que, junto a la otra semirrecta fijada, definirá dos ángulos (que suman un completo) uno en sentido contrario a las agujas del reloj (antihorario), que diremos positivo, y otro en sentido horario, que diremos negativo. Asociamos entonces al punto u el ángulo positivo. Recíprocamente, a cada ángulo positivo $\widehat{\alpha}$ determinado por dos semirrectas con extremo común en el origen, siendo una de ellas la de las abscisas positivas, le corresponde un único punto en la circunferencia unidad.

Esta relación entre ángulos y puntos de la circunferencia unidad es la que permite, entre otras, asociar a cada ángulo una "medida", así como poder definir las razones trigonométricas.

Para asociar esa medida usamos el hecho de que, además de que a cada ángulo $\widehat{\alpha}$ corresponde un único u_α en la circunferencia unidad; a este complejo corresponde el arco de circunferencia que va desde el número $1 = 1 + 0i$ al número u_α, recorrido en "sentido positivo" (sentido contrario a las agujas del reloj), y representamos por $\overset{\frown}{1\ u_\alpha}$. La "longitud" de este arco, denotado por $\ell[u, v]$ se toma como la medida del ángulo $\widehat{\alpha}$.

Este no es el momento de formalizar todas estas ideas, lo que sería un proceso largo que se escapa de nuestras posibilidades. Más adelante, estudiarás herramientas más eficaces para estudiar ángulos, longitudes y, como no, las razones trigonométricas. Ahora vamos a usar algunas ideas intuitivas que nos permitan introducir esos conceptos.

Dos arcos de igual longitud corresponde al mismo ángulo y a dos ángulos iguales corresponden arcos iguales (de igual longitud). Además, dado cualquier número real $\gamma \in [0, 2\pi)$ existe un arco $\overset{\frown}{1\ u}$ tal que $\ell[1, u] = \gamma$.



Un hecho importante en la relación entre ángulos y números complejos de la circunferencia unidad es la siguiente: si al ángulo $\widehat{\alpha}$ corresponde el complejo u_α y a otro ángulo $\widehat{\beta}$ corresponde el número u_β entonces al ángulo $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$ corresponde el número

$$u_{\alpha+\beta} = u_\alpha u_\beta.$$

Ya que la longitud de la circunferencia unidad es 2π, tendremos, por ejemplo, que

- $\ell[1, i] = \pi/2$.
- $\ell[1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i] = \pi/4$.
- $\ell[1, -1] = \pi$.

El número real π no sólo es un número irracional, esto es, que no se obtiene como división de dos enteros, sino que tampoco se obtiene usando radicales. Aquí tienes una aproximación con unos pocos de decimales:

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,5\ldots$$

Si $u \in \mathcal{C}(0,1)$ es tal que $\ell[1, u] = 1$, se denomina **radián** al ángulo que corresponde a ese arco.

Si se divide el arco $\overparen{1\ \ -1}$ en 180 arcos de igual longitud (o igual ángulo), se obtienen arcos de longitud $\dfrac{\pi}{180}$, al ángulo correspondiente a cualquiera de estos arcos iguales se le denomina **grado sexagesimal**.

Ya que a cada ángulo $\widehat{\alpha}$ corresponde un único complejo $u_\alpha \in \mathcal{C}(0,1)$ el ángulo $\widehat{\alpha}$ contiene $\alpha = \ell[1, u_\alpha]$ radianes; se dice entonces que el ángulo $\widehat{\alpha}$ **mide** o **vale** α radianes.

Cada ángulo $\widehat{\alpha}$ puede ser también expresado en grados (sexagesimales) una vez conocida la longitud del arco $\overparen{1\ u_\alpha}$ o, lo que es lo mismo, su medida en radianes, sin más que multiplicar ésta por $180/\pi$.

Ejercicio II.83. Encontrar un valor aproximado del ángulo radián expresado en grados.

La relación unívoca entre los ángulos y los arcos y, por tanto, con las longitudes de éstos, justifica expresiones, que usaremos a menudo, como $\widehat{\alpha} = \pi/2$ rad. ó $\widehat{\alpha} = 24°$ (– rad. – y – ° – representan a radianes y grados respectivamente).

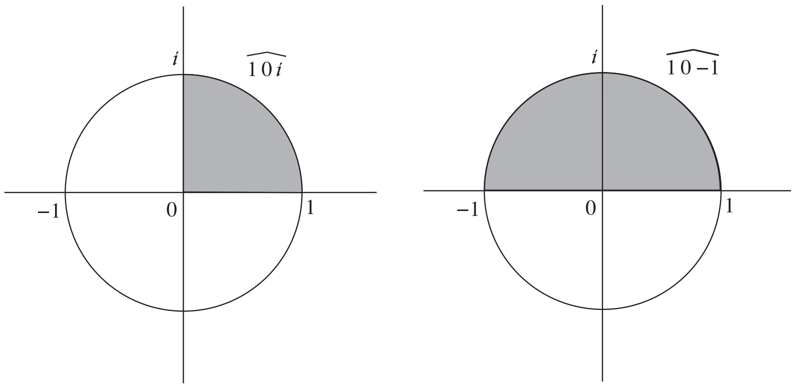
Al igual que en la circunferencia unidad, si en cualquier circunferencia la longitud de un arco es igual al radio entonces el ángulo que determina es el radián y, recíprocamente, si el ángulo es el radián la longitud del arco es igual al radio.

Ejercicio II.84. ¿Cuál es la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $2,5$ radianes en una circunferencia cuyo radio es 3?.

Ejercicio II.85. ¿Qué relación existe entre la longitud de un arco y el ángulo correspondiente medido en radianes en una circunferencia de radio r?

Algunos de los ángulos más usuales son los siguientes:

1. $\widehat{1\,0\,1} = 0$ radianes (ángulo nulo o cero).
2. $\widehat{1\,0\,i} = \pi/2$ radianes (ángulo recto).
3. $\widehat{1\,0\ -1} = \pi$ radianes (ángulo llano).



Definición 15.1 *Sea un ángulo $\widehat{\alpha}$ y $u_\alpha \in \mathcal{C}(0,1)$ el único número complejo tal que $\widehat{\alpha} = \widehat{10u_\alpha}$, entonces*

- *llamamos* **seno** *del ángulo $\widehat{\alpha}$ y denotamos por $\operatorname{sen}\widehat{\alpha}$ al número real*

$$\operatorname{sen}\widehat{\alpha} = \Im(u_\alpha).$$

- *llamamos* **coseno** *del ángulo $\widehat{\alpha}$ y denotamos por $\cos\widehat{\alpha}$ al número real*

$$\cos\widehat{\alpha} = \Re(u_\alpha).$$

- *si $\cos\widehat{\alpha} \neq 0$, llamamos* **tangente** *del ángulo $\widehat{\alpha}$ y denotamos por $\operatorname{tg}\widehat{\alpha}$ al número real*

$$\operatorname{tg}\widehat{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{\alpha}}{\cos\widehat{\alpha}}.$$

Si $u_\alpha = a + bi$, sabemos que $a = \Re(u_\alpha)$ y $b = \Im(u_\alpha)$ luego, según hemos definido, $a = \cos\widehat{\alpha}$ y $b = \operatorname{sen}\widehat{\alpha}$, así que

$$u_\alpha = \cos\widehat{\alpha} + i\operatorname{sen}\widehat{\alpha}.$$

Para cada $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ se verifican las siguientes propiedades:

(a) $\operatorname{sen}^2\widehat{\alpha} + \cos^2\widehat{\alpha} = 1.$

(b) $\operatorname{sen}(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}) = \operatorname{sen}\widehat{\alpha}\cos\widehat{\beta} + \operatorname{sen}\widehat{\beta}\cos\widehat{\alpha}$

(c) $\cos(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}) = \cos\widehat{\alpha}\cos\widehat{\beta} - \operatorname{sen}\widehat{\alpha}\operatorname{sen}\widehat{\beta}$

(d) $\operatorname{sen}(-\widehat{\alpha}) = -\operatorname{sen}\widehat{\alpha}$

(e) $\cos(-\widehat{\alpha}) = \cos\widehat{\alpha}$

Para probar (a) observa que si $u_\alpha \in \mathcal{C}(0,1)$,

$$\operatorname{sen}^2\widehat{\alpha} + \cos^2\widehat{\alpha} = \Re(u_\alpha)^2 + \Im(u_\alpha)^2 = 1$$

Ya que $u_{\alpha+\beta} = u_\alpha u_\beta$, resulta

$$u_{\alpha+\beta} = \cos(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}) + i\operatorname{sen}(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})$$
$$u_\alpha = \cos\widehat{\alpha} + i\operatorname{sen}\widehat{\alpha}$$
$$u_\beta = \cos\widehat{\beta} + i\operatorname{sen}\widehat{\beta}$$

Ejercicio II.86. Iguala las partes real e imaginaria de los complejos $u_{\alpha+\beta}$ y $u_\alpha u_\beta$ para obtener las propiedades (b) y (c).

Para probar las propiedades (d) y (e) observemos que $u_{-\alpha}u_\alpha = u_0 = 1$ luego

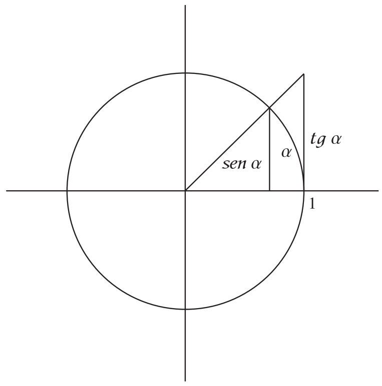
$$u_{-\alpha} = u_\alpha^{-1} = \Re(u_\alpha) - \Im(u_\alpha)i$$

de donde se obtiene que $\operatorname{sen}(-\widehat{\alpha}) = -\operatorname{sen}\widehat{\alpha}$ y $\cos(-\widehat{\alpha}) = \cos\widehat{\alpha}$

Una relación que nos puede ser útil es la siguiente: si $\widehat{\alpha} < \pi/2$ radianes entonces

$$\operatorname{sen}\widehat{\alpha} \leq \ell[1, u_\alpha] \leq \operatorname{tg}\widehat{\alpha}$$

La igualdad sólo se da para el ángulo nulo. En la siguiente gráfica puedes ver esa relación (no pienses que esto lo demuestra):



Para un número real $x \in [0, 2\pi)$ se define:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x \text{ rad.}) \quad \cos x = \cos(x \text{ rad.}) \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x \text{ rad.})$$

Para cualquier otro número real x es posible definir también estas razones trigonométricas de la siguiente forma: llamamos

$$k_x = \text{ent}\,(\frac{x}{2\pi}) \quad \text{y} \quad z_x = x - 2k_x\pi.$$

Por definición de parte entera, k_x es el único número entero tal que:

$$k_x \leq \frac{x}{2\pi} < k_x + 1; \quad \text{esto es} \quad 2k_x\pi \leq x < 2(k_x + 1\pi).$$

De donde, $0 \leq x - 2k_x\pi < 2\pi$. Lo que prueba que,

$$x = z_x + 2k_x\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq z_x < 2\pi,$$

siendo k_x y z_x únicos para cada x. Ahora se definen,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} z_x \quad \cos x = \cos z_x \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} z_x$$

Ejercicio II.87. Prueba las siguientes propiedades:

(a) Para cualquier número real x $\operatorname{sen} x, \cos x \in [-1, 1]$.

(b) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad x \in \mathbb{R}$.

(c) $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$ y $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ para $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\operatorname{sen} x < x$ si $x > 0$.

(e) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$.

(f) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

(g) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

(h) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(-x) = \cos x$.

(i) $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$

(j) $\cos A + \cos B = 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$.

(k) Si $0 < x < \pi/2$ se tiene que $\operatorname{tg} > x$.

Para cualquier número real x se definen los siguientes números reales:

cosecante $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ cuando $\operatorname{sen} x \neq 0$

secante $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ cuando $\cos x \neq 0$

cotangente $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ cuando $\operatorname{sen} x \neq 0$

Ejercicio II.88. Probar las siguientes relaciones trigonométricas ($x, y \in \mathbb{R}$):

(a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

(b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

(c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

(d) $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

(e) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

(f) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(g) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$

(h) $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$

(i) $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y))$

(j) $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

(k) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x$

(l) $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$

(m) $\cos(x + \pi) = -\cos x$